ANÁLISE DO MODELO DE BLACK & SCHOLES PARA PRECIFICAÇÃO DE OPÇÕES NO MERCADO FINANCEIRO BRASILEIRO

Thiago Camacho Navarro – thiagocnavarro@hotmail.com
Victor Nunes – victor_n1997@hotmail.com
Vitor Spada Alfano – vitoralfano1@gmail.com
Osvaldo Ramos Tsan Hu (Orientador) – osvaldo.hu@mackenzie.br

RESUMO

O presente trabalho expõe uma pesquisa referente ao modelo de Black & Scholes, um dos métodos mais utilizados no mundo para calcular o preço justo de uma opção no mercado financeiro, o qual tem como finalidade encontrar uma solução de precificação a fim de eliminar o risco de perda dentro de um portfólio. Sendo assim, é apresentada uma análise deste modelo para a precificação de opções no mercado financeiro brasileiro. Com a intenção de responder como o comportamento da volatilidade implícita no mercado de opções diverge da maneira com que foi utilizada de premissa na teoria de Black & Scholes, têm-se como objetivo analisar o modelo de precificação de Black & Scholes e suas variáveis, para a identificar o preço justo de uma opção europeia. Para isso, faz-se necessário explorar o modelo de Black & Scholes em uma visão de mercado e entender o modo com que a volatilidade implícita é negociada, diferentemente da premissa utilizada no modelo, pelo motivo de possuir diferentes volatilidades para cada preço de exercício para um prazo determinado. Para tal fim utilizou-se da pesquisa de campo quantitativa como metodologia e identificou-se que as volatilidades das opções do mercado brasileiro não são constantes e possuem uma certa inclinação e concavidade, conhecida como *Smile*. E foi possível concluir que a premissa de volatilidade constante do modelo de precificação de opções Black & Scholes não é a utilizada pelo mercado brasileiro para definir qual o preço justo da opção, pois o preço justo acaba divergindo do real preço praticado pelo mercado.
Palavras-chave: Black & Scholes, volatilidade implícita, precificação de opções, *Smile*

ABSTRACT

The present work shows a research related to the Black & Scholes model, one of the most used methods in the world to calculate the fair price of an option in the financial market, which aims to find a pricing solution in order to eliminate the risk of loss within a portfolio. Therefore, an analysis of this model is presented for pricing options in the Brazilian financial market. With the

intention of answering how the behavior of the implied volatility in the options market differs from the way it was used as a premise in the Black & Scholes theory, focused to analyze the Black & Scholes pricing model and its variables, to identify the fair price of a European option. For this, it is necessary to explore the Black & Scholes model in a market view and understand the way in which the implied volatility is traded, differently from the premise used in the model, for the reason of having different volatilities for each exercise price for a specified period. For this purpose, quantitative field research was used as a methodology and it was identified that the volatilities of the options in the Brazilian market are not constant and have a certain inclination and concavity, known as Smile. It was possible to conclude that the volatility premise contained in the Black & Scholes option pricing model is not the one used by the Brazilian market to define the fair price of the option, as the fair price ends up diverging from the real price practiced by the market.
Key words: Black & Scholes, implied volatility, option pricing, Smile

1 INTRODUÇÃO

O mercado financeiro brasileiro é conhecido mundialmente por sua alta volatilidade. Com isso, a utilização de derivativos se faz necessário a fim de se proteger contra as incertezas do mercado e mitigar o risco de perda da carteira. Para isso, existem diversos métodos utilizados para encontrar o melhor preço do instrumento financeiro.

O modelo de Black & Scholes é um dos modelos mais utilizados no mundo para calcular o preço justo de uma opção no mercado financeiro, o qual tem como objetivo encontrar uma solução de precificação a fim de eliminar o risco de perda dentro de um portfólio. Desenvolvida na década de 70 por Fisher Black, Robert Merton e Myron Scholes (1973), a fórmula possui as seguintes variáveis: preço de exercício (*Strike)* da opção, preço atual da ação, tempo de expiração do contrato, taxa livre de risco e volatilidade.

Com isso, o presente trabalho relatará o seguinte problema de pesquisa: Como o comportamento da volatilidade implícita (volatilidade esperada de uma ação em um prazo futuro) diverge da maneira com o que foi previsto na teoria de Black & Scholes. Para isso, têm-se o objetivo geral analisar o modelo de precificação de Black & Scholes e suas variáveis e identificar o preço justo de uma opção europeia. Como objetivos específicos, analisar o modelo de Black & Scholes em uma visão de mercado e entender o modo com que a volatilidade implícita é negociada, diferentemente da premissa utilizada no modelo, pelo motivo de possuir diferentes *strike* e prazos. Para isso, é necessário demonstrar através das opções de ações com maior liquidez para os prazos de um e dois meses os diferentes níveis de volatilidade implícita para um determinado intervalo de *strike* e como esse preço real de mercado diverge da teoria de Black e Scholes (1973) se fosse utilizada uma volatilidade constante em todos os *strikes*.

Assim, este estudo tem como justificativa analisar o modelo de Black & Scholes utilizado na precificação de opções no mercado brasileiro, pois, até os dias de hoje, este modelo é uma referência no mercado financeiro, sendo estudado por todos os profissionais que entram na área de atuação com opções.

Como motivação para abordar este tema, viu-se o interesse em poder captar o funcionamento deste famoso modelo utilizado no mercado financeiro, para que assim, possa ser compreendido e explicado a forma de como é possível calcular o preço de uma opção utilizando este método. Espera-se que o estudo possa ajudar à futuros estudantes que desejam entender mais a fundo sobre o modelo de Black & Scholes e incentivá-los a explorar mais este tema.

2 REVISÃO DA LITERATURA

O derivativo é um instrumento financeiro no qual ele tem as suas características e os seus valores atrelados a um determinado ativo. Inicialmente ele foi criado com o intuito de proteção (*Hedge*), sendo este instrumento além de ser utilizado para proteção, também utilizado para especulação de mercado, arbitragem e alavancagem. Os contratos de derivativos normalmente são padronizados por especificações prévias, como o tamanho do contrato, a quantidade mínima que pode ser negociada e quando será a sua liquidação. Existem 4 principais tipos de mercado de derivativos: Mercado de opções, mercado a termo, mercado de swap e mercado de futuros.

Para se negociar os derivativos no Brasil, existem dois ambientes. O ambiente de negociação em Bolsa e o mercado de Balcão. No ambiente de bolsa é possível negociar os produtos listados, os quais possuem as principais características padronizadas, e alguns produtos exóticos, já no mercado de Balcão é possível fazer operações sem contraparte central de liquidação. O Mercado de opções é o mercado onde se é possível negociar direitos de compra e venda de ativos que são negociados na Bolsa de Valores. As opções no mercado brasileiro são padronizadas com seus vencimentos sempre na terceira segunda-feira de cada mês até maio de 2021 e na terceira sexta-feira de cada mês a partir de então. A opção de compra é conhecida no mercado como *Call* e a opção de venda conhecida como *Put*. A opção é um direito de compra ou venda em um determinado do ativo no preço de exercício (*Strike)* definido, valor que o investidor terá o direito de comprar ou vender o ativo, no vencimento da opção. Com opções, os investidores conseguem traçar diversas estratégias, como especular mercado, fazer proteção dos investimentos ou alavancar o patrimônio.

Com o mercado de opções ganhando destaque, Robert Merton, Myron Scholes e Fischer Black apresentaram ao mundo, no início da década de 1970, uma solução para a precificação de opções a fim de eliminar o risco de perda dentro de um portfólio. Segundo Black e Scholes (1973) o método originou-se a partir de equações derivadas parciais de problemas oriundos da física, a partir da equação de transferência de calor de Churchill-Bernstein. Desde então, a resolução de Black & Scholes é utilizado por fundos de investimentos, bancos, entre outras instituições financeiras para definição do valor justo de uma opção.

O modelo matemático Black & Scholes é usado para definir o preço da *Call* e *Put*. O preço de uma opção é definido pelas seguintes variáveis: preço da ação, tempo até o vencimento, preço de exercício, taxa de juros livre de risco, volatilidade da ação subjacente. (BLACK, F; SCHOLES, M, 1973).

A proposta de Black e Scholes (1973) tem como objetivo determinar o preço de uma *Call* assumindo condições ideais no mercado de ações:

Pode ser notado abaixo as premissas utilizadas no modelo:

a. A taxa de juros livre de risco é conhecida e constante ao longo do tempo;
b. O preço da ação segue um caminho aleatório em um período contínuo. Logo, o preço da ação segue uma distribuição lognormal e com volatilidade constante;
c. A ação não paga proventos;
d. A opção é “Europeia”, ou seja, só pode ser exercida no vencimento;
e. Não há custos de transação na compra ou venda da ação ou opção;
f. É possível alugar qualquer quantidade fracionária do ativo;
g. Não há penalidades por operar “vendido” na opção. O vendedor pode negociar a opção sem ter o derivativo.

Com essas condições, o preço da opção dependerá unicamente do preço da ação e do tempo até o vencimento, já que as demais variáveis são constantes. Assim, é possível utilizar o processo conhecido como delta *hedge*. O delta *hedge* é uma operação de proteção do portfólio de opções contra oscilações do preço da ação subjacente, sem nenhuma intenção de lucro ou arbitragem. Desta forma, é possível criar uma estrutura de proteção em um portfólio comprado em ação e vendido em opção. Segundo Black e Scholes (1973), define-se $w(x,t)$ para o valor do prêmio de uma opção em função do preço da ação x e tempo t, a quantidade de opções que devem ser vendidas contra uma quantidade de ação comprada é:

$$1/_{w_1(x,t)} \tag{1.1}$$

O índice (1.1) refere-se a derivada parcial de $w(x,t)$ em relação ao primeiro argumento.

Segundo Hull (2016, p.305), o delta (Δ) de uma opção sobre ações é a razão entre a mudança no preco da opção sobre ações e a mudança no preço da ação subjacente. Por exemplo, uma opção custa R$ 2,00 para um prazo de 3 meses e com preço de exercício de R$ 50,00 com o preço da ação à R$ 48,00. Entretanto, o preço da ação varia para R$ 50,00 e todas as demais variáveis permanecem constates, no mercado a opção passa a custar R$ 3,40. Assim, podemos afirmar que o delta desta opção é de 70%. Conforme a fórmula abaixo:

$$delta = w_1(x,t) = \frac{\partial w}{\partial t} \approx \frac{(3{,}40 - 2{,}00)}{(50{,}00 - 48{,}00)} \approx \frac{1{,}40}{2{,}00} = 0{,}70 = 70\% \qquad (1.2)$$

Sendo assim, considerando que um *trader* gostaria de comprar 1.000 *Calls* com delta 70% de uma certa ação e para proteger essa posição será necessário a venda de 700 ações. Podemos considerar que a posição será de 1.000 *Call*s em um valor total de R$ 2.000 e 700 ações no valor de R$ 33.600. Considerando que a opção vale R$ 2,00 no mercado com a ação a R$ 48,00:

$$33.600 - 2.000 = 31.600 \qquad (1.3)$$

E em outro cenário a opção irá valer R$ 3,40 com a ação a R$ 50,00 pois possui um delta de 70%:

$$35.000 - 3.400 = 31.600 \qquad (1.4)$$

Com isso, nota-se que o valor do portfólio permanece o mesmo e demonstra a teoria de proteção de carteira de Black & Scholes, que utiliza a seguinte fórmula:

$$x - \frac{\mathrm{w}}{w_1} \qquad (1.5)$$

Portanto o valor da carteira em um pequeno intervalo de tempo é denominado pela seguinte equação:

$$\Delta x - \frac{\Delta \mathrm{w}}{w_1} \qquad (1.6)$$

Assumindo que a variação é contínua, o modelo se baseia no processo estocástico. Segundo Hull (2016, p. 355), entende-se por processo estocástico um conjunto de números formado de forma aleatória em um intervalo de tempo T, sendo de forma contínua ou discreta.

Assim, expandindo o Δw da equação (1.6), para a seguinte fórmula:

$$\Delta w = w_1 \Delta x + \frac{1}{2} w_{11} \sigma^2 x^2 \Delta t + w_2 \Delta t \qquad (1.7)$$

De acordo com a notação original de Black & Scholes, w_{11} representa a derivada parcial de w_1 em relação ao tempo e σ^2 a variância do ativo objeto, também conhecida como volatilidade ao quadrado.

Substituindo (1.7) em (1.6), tem-se:

$$\Delta x - \frac{\left(w_1 \Delta x + \frac{1}{2} w_{11} \sigma^2 x^2 \Delta t + w_2 \Delta t\right)}{w_1} = \frac{-\left(\frac{1}{2} w_{11} \sigma^2 x^2 + w_2\right) \Delta t}{w_1} \tag{1.8}$$

De acordo Black e Scholes (1973), o retorno de uma posição protegida deve ser igual a taxa de juros livre de risco no tempo, expressa por $r\Delta t$. Considerando que uma operação protegida de uma ação com baixo risco e onde o mercado não tem expectativa de variação, o retorno será a taxa de juros livre de risco.

Segundo Hull (2016), o retorno do portfólio livre de risco é dado por:

$$\Delta \Pi = r \Pi \, \Delta t \tag{1.9}$$

Com isso, o valor futuro de uma ação no tempo, pode ser denominada por $r\Delta t$.

Substituindo (1.6) e (1.7) em (1.8) tem-se:

$$\frac{-\left(\frac{1}{2} w_{11} \sigma^2 x^2 + w_2\right) \Delta t}{w_1} = \left(x - \frac{w}{w_1}\right) r \Delta t \Rightarrow w_2 = rw - rxw_1 - \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 w_{11} \tag{1.10}$$

Sendo está a Equação Diferencial de Black e Scholes (1973).

A solução desta equação foi realizada no artigo de Black e Scholes (1973) através de um modelo original de transferência de Calor. E sua expressão mais difundida da equação diferencial (1.10) é dada por:

$$c = S_0 N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2) \tag{1.11}$$

$$p = K e^{-rT} N(-d_2) - S_0 N(-d_1) \tag{1.12}$$

Onde:

$$d_1 = ln\left(\frac{K}{S}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right) . T \tag{1.13}$$

$$d_2 = d1 - \sigma . \sqrt{T} \tag{1.14}$$

Segundo Hull (2016), a função N(x) é uma função de distribuição de probabilidade cumulativa para uma determinada variável com distribuição normal padrão. Sendo c e p o preço de uma opção de compra e uma opção de venda respectivamente, ambas europeias, S_0 é o preço atual da ação, r representa a taxa de juros livre de risco, K o preço de exercício da opção, σ a volatilidade implícita do ativo objeto e T o tempo de maturidade até o vencimento.

Existem três principais formas de cálculo da volatilidade, são elas: histórica, onde são utilizadas medições passadas de uma variável para presumir a volatilidade (MORETTIN, 2008); implícita, é equacionado a partir do preço de mercado analisado com o preço modelado de uma opção europeia; e estatístico, o qual é calculado de acordo com modelos econométricos com dados anteriores da variável.

O método mais simples de calcular a volatilidade histórica de uma série de retornos é por meio do cálculo do desvio padrão dos dados históricos de uma amostra. Segundo Heij et al. (2004) pode ser calculado da seguinte forma:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n-1}} \tag{1.15}$$

onde S é o desvio padrão, X é a observação i, X é a média e n é o número de observações da amostra.

Em contra partida, a variância (V) é o desvio padrão elevado ao quadrado (HEIJ et al., 2004). Sendo assim, a fórmula consiste em:

$$V = S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n-1} \tag{1.16}$$

Entretanto, está técnica é pouco eficiente em registrar informações recentes, pois um dos principais problemas é distribuir peso igual para todas as observações. Além disso, a variância dos retornos é considerada constante ao longo do tempo, e por muitas vezes, não é identificado em séries financeiras (HEIJ et al., 2004).

Sendo assim, volatilidade implícita, também conhecida como volatilidade do mercado, é a que se obtém ao utilizar as fórmulas de Black & Scholes. A única medida nas fórmulas de precificação deste modelo que não é possível ser observada diretamente é a volatilidade do preço das ações.

Utilizada para monitorar o ponto de vista do mercado sobre a volatilidade de uma ação específica, a volatilidade implícita é prospectiva, ao contrário da histórica que é retrospectiva. Os *traders* costumam citar a volatilidade implícita de uma opção e não o preço. Isso é cabível, pois a volatilidade implícita tende a ser menos variável que o preço da opção.

Ao calcular a volatilidade implícita de uma série de opções de um determinado ativo escolhido, um dos efeitos que é possível identificar é uma variação em sua volatilidade em relação ao *Strike* da opção, efeito que se é conhecido como *Smile* *"*Sorriso da volatilidade". Sendo assim, ao sair da teoria e se testar em um modelo real de mercado, nota-se que diferente do que se é definido no modelo de Black & Scholes, um mesmo ativo não possui uma mesma volatilidade implícita independente do seu *Strike* (MORETTIN, 2008);

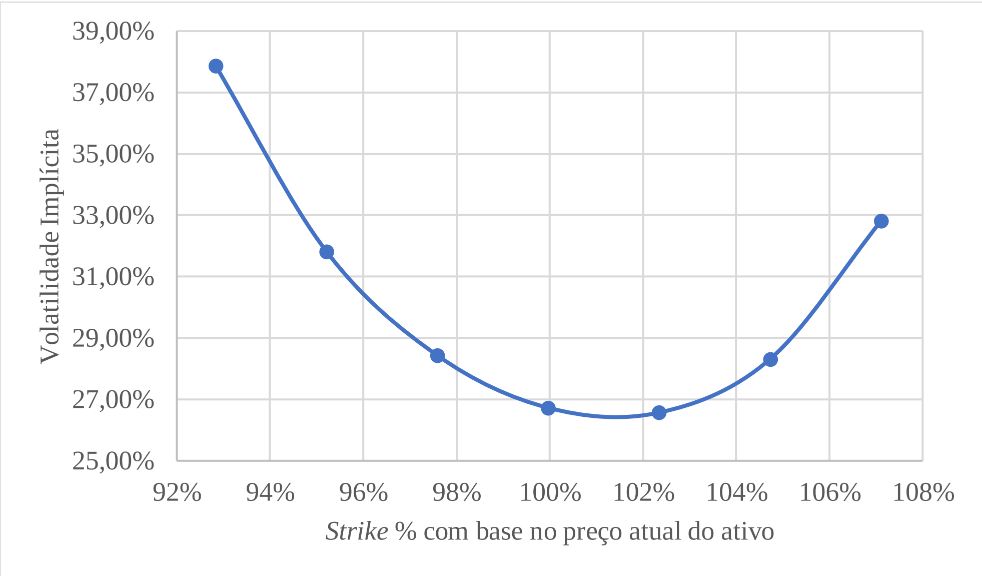

Gráfico 1: Volatilidade implícita com *Smile* de VALE3 do dia 14 de outubro de 2020 para o vencimento de 19 de outubro de 2020.

Fonte: Os autores com base na Bloomberg dia 14 de outubro de 2020

Ao se analisar um gráfico de uma série de opções de um mesmo ativo com o efeito *Smile*, pode-se notar que as opções que têm o *strike* mais próximos do dinheiro, ou seja, que o preço de exercício está mais próximo do valor do ativo base no momento, tem uma volatilidade implícita menor do que as opções com *strike* mais dentro ou fora do dinheiro, normalmente os s*trikes* de menores possuem volatilidade mais alta que *strikes* maiores.

O modelo de Black e Scholes (1973) utiliza como premissa que a volatilidade implícita de uma opção de ação seja sempre constante para um determinado prazo, independente do preço de exercício. Caso esta afirmação fosse verídica, seria visto no que o gráfico de volatilidade implícita em um intervalo de preço de exercício para um determinado vencimento uma linha plana.

Antes da crise o modelo de Black & Scholes conseguia descrever mais precisamente o mercado de opções. De acordo com Derman-Miller (2016), embora o *Smile* tenha aparecido nos mercados de opções sobre índices de ações após o *crash* de 1987, começaram a surgir diferentes volatilidade para cada *Strike* de uma ação no mesmo vencimento, criando assim um sorriso, no sentido literal de que as volatilidades implícitas em função do preço de exercício se assemelhavam a um sorriso. A aparência do *Smile* após o *crash* de 1987 foi claramente conectada ao choque visceral ao descobrir, pela primeira vez desde 1929, um mercado gigante poderia cair repentinamente 20% ou mais em um dia. Os participantes do mercado chegaram imediatamente à conclusão de que um investidor pagaria mais por opções de risco de queda do que por risco de alta. Desde o *crash* de 1987, o *Smile* se espalhou para a maioria dos outros mercados de opções (moedas, renda fixa, commodities), mas em cada mercado ele assumiu sua própria forma e formato característicos. *Traders* e *Quants* em todas as áreas de produtos tiveram que modelar o *Smile* em seu próprio mercado. A modelagem do *Smile* é provavelmente uma das maiores fontes de risco do modelo nas finanças.

A volatilidade é o parâmetro mais complexo dentro dos demais utilizados na precificação do modelo de Black & Scholes, dado que alguns parâmetros como preço de exercício e vencimento são definidos no termo do contrato, taxa de juros livre de risco e preço do ativo subjacente são observados em tempo real no mercado, já a volatilidade é desconhecida e pode variar entre os *Traders* caso não possua liquidez.

Para a precificação de uma opção com baixa liquidez, pode-se utilizar volatilidade histórica e fatos futuros para a definição da volatilidade futura deste ativo, sendo assim produzindo um preço justo para essa opção. Por outro lado, caso haja uma opção que seja negociada em tempo real no mercado com alta liquidez, é possível identificar a volatilidade que ela está sendo negociada através da conta inversa utilizando o preço da opção na fórmula de Black & Scholes. Portanto, mesmo que a premissa do modelo sobre uma volatilidade constante não seja realmente presenciada no mercado, a volatilidade implícita ainda nos permite reconstruir o preço da opção de mercado correspondente, a partir de sua fórmula.

3 METODOLOGIA

A. **Método**: Pesquisa de campo; Quantitativa; Período em que foram realizadas as coletas dos níveis de volatilidade implícita: Entre dia 04 de setembro de 2020 e 21 de outubro de 2020; Dados retirados da plataforma da Bloomberg.
B. **Aparatos de Pesquisa:** Computador; Planilha do Excel; Artigo de Revista de Black e Scholes (1973) do Journal of Political Economy.
C. **Procedimentos**: Para mostrar os níveis de volatilidade das opções de ações do mercado brasileiro, foi realizada coleta de dados de volatilidade por volta do meio-dia em dias úteis aleatórios, momento em que há muita liquidez no mercado brasileiro de opções. Ao todo, foram retiradas 910 amostras de volatilidades implícitas. Foram utilizadas 5 empresas na pesquisa, sendo elas: Petrobrás (PETR4); Vale (VALE3); Banco do Brasil (BBAS3); Itaú (ITUB4) e Via Varejo (VVAR3). Considerando que a maior liquidez de opções está nos vencimentos mais curtos, foram coletadas amostras para o primeiro e segundo vencimento de opções. Para demonstrar a curva de volatilidade utilizada no mercado, foram efetuadas coletas da volatilidade de 7 *strikes* diferentes para cada ação e para cada vencimento. Os dados utilizados para descobrir a volatilidade implícita nas opções foram a taxa de juros no período, os dias úteis até o vencimento, o preço de exercício da opção e o preço da ação no momento da coleta. Com isso, foi realizada a demonstração da volatilidade negociada no momento e o preço da opção no mercado, e qual seria o preço da opção caso fosse utilizada uma volatilidade constante para todos os *strikes* de uma ação e vencimento.
D. **Critérios:** Para realização da análise, validação e discussão dos resultados, serão utilizadas as volatilidades implícitas coletadas a partir dos valores do *mid* de mercado, que é a média entre o valor de compra e o valor de venda ofertados na plataforma de negociação da B3.

4 RESULTADOS OBTIDOS E DISCUSSÃO

Diante dos dados levantados na coleta, foi identificado que as volatilidades das opções do mercado Brasileiro não são constantes e possuem uma certa inclinação e concavidade, conhecida como *Smile*. Essa volatilidade, em grande parte dos casos, é maior em strikes mais baixos e menor em strikes mais alto. Essa inclinação não é algo padronizado, como já notado no estudo.

Abaixo, nota-se uma tabela onde a partir das variáveis de mercado, foram retirados os valores reais negociados de *call* e *put* e com isso encontrada a volatilidade implícita dessas opções (Mercado). Em seguida, utilizamos a mesma volatilidade implícita do *strike* mais próximo ao 100% para os demais *strikes* para encontrar o valor caso o mercado calculasse com volatilidade constante :

					Black & Scholes			Mercado		
SPOT	ATIVO	STRIKE	VENCIMENTO	MONEYNESS	CALL	PUT	VOL IMPLÍCITA	CALL	PUT	VOL IMPLÍCITA
19,46	PETR4	17,20	16/nov/20	88,4%	2,66	0,36	45,05%	2,75	0,46	50,01%
19,46	PETR4	17,95	16/nov/20	92,2%	2,13	0,57	45,05%	2,19	0,65	48,01%
19,46	PETR4	18,70	16/nov/20	96,1%	1,66	0,86	45,05%	1,70	0,89	46,21%
19,46	PETR4	19,45	16/nov/20	99,9%	1,27	1,21	45,05%	1,27	1,21	45,05%
19,46	PETR4	20,20	16/nov/20	103,8%	0,95	1,64	45,05%	0,93	1,62	44,33%
19,46	PETR4	20,95	16/nov/20	107,7%	0,70	2,14	45,05%	0,66	2,10	43,69%
19,46	PETR4	21,70	16/nov/20	111,5%	0,50	2,69	45,05%	0,46	2,66	43,16%

Tabela 1 – Opções de PETR4 com vencimento em 16 de novembro de 2020

Fonte: Os autores com base na Bloomberg dia 29 de setembro de 2020

Suponha-se que tesoureiro de um banco, que gostaria de comprar uma *call* de PETR4 com s*trike* R$20,20 para 16 de novembro de 2020. Caso ele fosse precificar essa opção apenas utilizando a metodologia de Black e Scholes (1973), onde considera uma volatilidade constante, essa opção iria valer R$ 0,70. Após a compra, a equipe de risco do banco iria avaliar a operação, fazendo a marcação à mercado, e com isso um valor negativo seria percebido. Esta diferença está entre o valor de R$ 0,70 da compra da opção, com volatilidade de 45,05%, e o valor de mercado de R$ 0,66 com volatilidade de 43,69%.

Para chegar a estes valores da tabela 1, foram identificados os s*trikes* negociados com liquidez para cada ação e vencimento, sendo três *strikes* abaixo do preço atual da ação, três acima e um mais próximo ao preço atual negociado na B3. Com esses dados, é possível identificar o valor da *call* e da *put* negociados no mercado no momento da coleta. E assim resultando na volatilidade implícita para cada opção a partir de equações numéricas do Black & Scholes, onde todas as outras variáveis exceto a volatilidade são conhecidas.

Abaixo, será explicado o método de como foi encontrada a volatilidade implícita de um *strike* e aplicada para os demais no mesmo vencimento para seguir a premissa de volatilidade constante.

No vencimento de 16 de novembro de 2020 para as opções de PETR4 (Tabela 1), foi identificado o *strike* aberto para negociação na Bolsa mais próximo ao preço atual do ativo (*Spot)*. Com isso substituiu-se todas as variáveis conhecidas na fórmula de Black e Scholes (1973):

S_0 é o preço atual do ativo: R$ 19,46

K é o *strike*: R$ 19.45

r é a taxa de juros livre de risco exponencial anualizada: 1.94%

T é o fator do tempo na base 252: 0.126984127 (32 dias úteis até o vencimento)

$$c = S_0 N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2) \tag{1.17}$$

$$p = Ke^{-rT} N(-d_2) - S_0 N(-d_1) \tag{1.18}$$

Onde:

$$d_1 = ln\left(\frac{K}{S}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right).T \tag{1.19}$$

$$d_2 = d1 - \sigma.\sqrt{T} \tag{1.20}$$

E na sequência, através do algoritmo Generalized Reduced Gradient (GRG) descrito por Lasdon et al. (1978), encontrar a volatilidade σ que mais aproxime ao resultado do valor da c*all* no mercado naquele momento: R$ 1,27.

É indiferente fazer o método através da fórmula da *call* para chegar no valor de mercado de R$ 1,27 ou da p*ut* de R$ 1,21 para encontrar a volatilidade, pois será 45,05% para ambos os casos.

Após a identificação da volatilidade mais próxima ao *strike* do preço atual da ação, aplica-se essa mesma volatilidade para os demais *strikes* a partir da fórmula de Black & Scholes (1.11) e (1.12) e mantendo inalteradas as quatros variáveis citadas acima. Com isso será possível prever o valor das opções de *call* e *put* para 7 *strikes* diferentes no mesmo vencimento com uma volatilidade constante como citado na metodologia de Black e Scholes (1973).

Conforme detalhado acima, observa-se na fórmula como foi encontrado o preço da *call* de R$ 0,70 do *strike* R$ 20,95.

$$d_1 = ln\left(\frac{20{,}95}{19{,}46}\right) + \left(1{,}94\% + \frac{45{,}05\%^2}{2}\right) * \ 0{,}126984127 = \ -0{,}363973133 \tag{1.21}$$

$$d_2 = -0{,}363973133 - \ 45{,}05\%.\sqrt{0{,}126984127} = -0{,}524501156 \tag{1.22}$$

$$c = 19{,}46 * N(-0{,}363973133) - 20{,}95e^{-1{,}84*0{,}126984127} N(-0{,}524501156) = 0{,}70 \tag{1.23}$$

Abaixo, é possível observar a inclinação da curva de volatilidade implícita no mercado das opções de PETR4 para o vencimento de 16 de novembro de 2020.

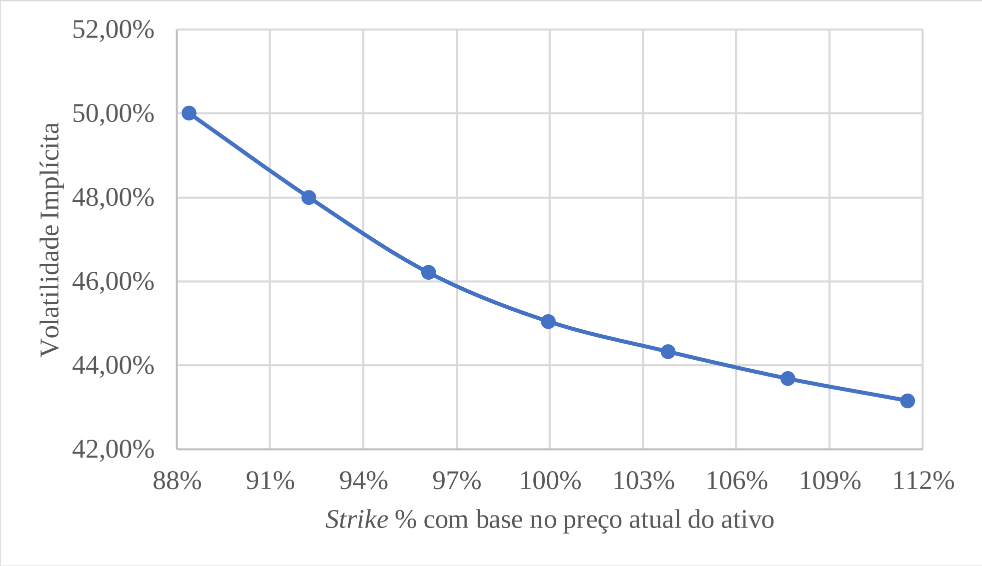

Gráfico 2: Volatilidade implícita de PETR4 no mercado do dia 29 de setembro de 2020 para o vencimento de 16 de outubro de 2020.

Fonte: Os autores com base na Bloomberg dia 29 de setembro de 2020

Caso nessas opções fossem utilizadas uma volatilidade constante, como afirmado por Black e Scholes (1973): "A volatilidade de uma ação é constante", o preço das opções não seriam os mesmos dos preços utilizados no mercado de opções brasileiro e o gráfico seria uma linha plana no nível da volatilidade do Strike 100%.

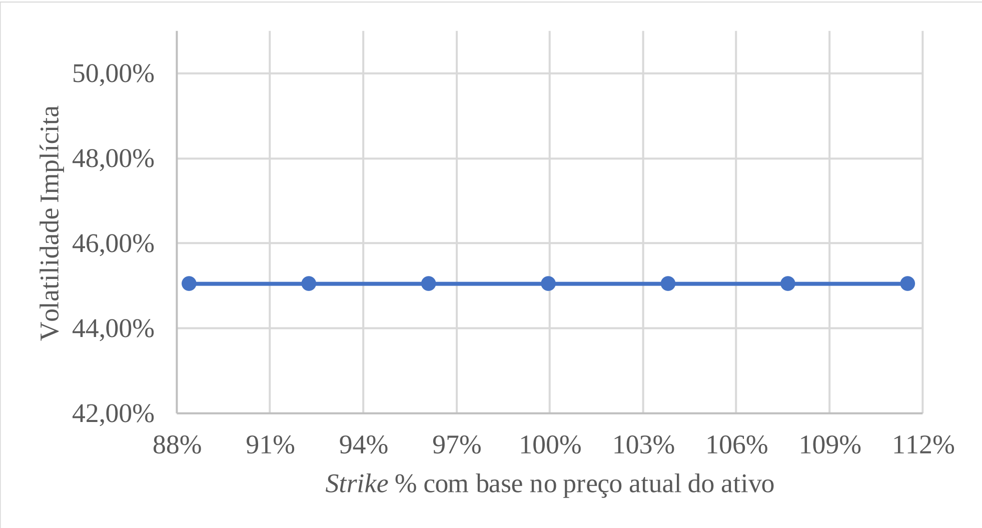

Gráfico 3: Volatilidade teórica do Black & Scholes de PETR4 do dia 29 de setembro de 2020

Fonte: Os autores com base na Bloomberg dia 29 de setembro de 2020

Essas diferenças podem ser bem relevantes quando tratadas em operação com um valor nominal muito alto. Na tabela abaixo é possível observar as diferenças percentuais dos preços obtidos através da premissa de volatilidade constante em relação ao valor de mercado das opções da Tabela 1.

					Black-Scholes		Mercado		Diferenca %	
SPOT	ATIVO	STRIKE	VENCIMENTO	MONEYNESS	CALL	PUT	CALL	PUT	CALL	PUT
19,46	PETR4	17,20	16/nov/20	88,4%	2,66	0,36	2,75	0,46	-3,12%	-21,37%
19,46	PETR4	17,95	16/nov/20	92,2%	2,13	0,57	2,19	0,65	-2,79%	-10,88%
19,46	PETR4	18,70	16/nov/20	96,1%	1,66	0,86	1,70	0,89	-2,11%	-3,58%
19,46	PETR4	19,45	16/nov/20	99,9%	1,27	1,21	1,27	1,21	0,17%	0,36%
19,46	PETR4	20,20	16/nov/20	103,8%	0,95	1,64	0,93	1,62	2,32%	1,66%
19,46	PETR4	20,95	16/nov/20	107,7%	0,70	2,14	0,66	2,10	5,56%	1,92%
19,46	PETR4	21,70	16/nov/20	111,5%	0,50	2,69	0,46	2,66	9,84%	1,18%

Tabela 2 – Diferença entre os preços das opções com vencimento em 16 de novembro de 2020
Fonte: Os autores com base na Bloomberg dia 29 de setembro de 2020

Na Tabela 2 é possível perceber a diferença % entre uma precificação através da premissa de Black & Scholes e da praticada no mercado. E assim, supondo um Gestor de Portfólio que decidir comprar uma *call*, no mercado, com *strike* R$ 21,70 para 16 de novembro de 2020 irá perder 9.84% do prêmio utilizado no momento que executar a operação, pelo simples fato de utilizar uma premissa que não é utilizada no mercado.

Como citado no trabalho acima, usualmente a volatilidade implícita para um prazo determinado de uma ação, é maior quanto menor o *strike*. Entretanto, existem alguns momentos em que essa curva de volatilidade se altera, e fazendo com que um *strike* maior possua uma volatilidade acima que um menor. Isso pode acontecer por vários fatores, muitas vezes por conta de uma perspectiva de uma rápida alta nas ações, por uma alta demanda de opções com *strike* de alta, por expectativa de resultado próximo ao vencimento, entre outros.

É possível notar que a curva de volatilidade começa a aumentar nos *strikes* mais alto no gráfico abaixo.

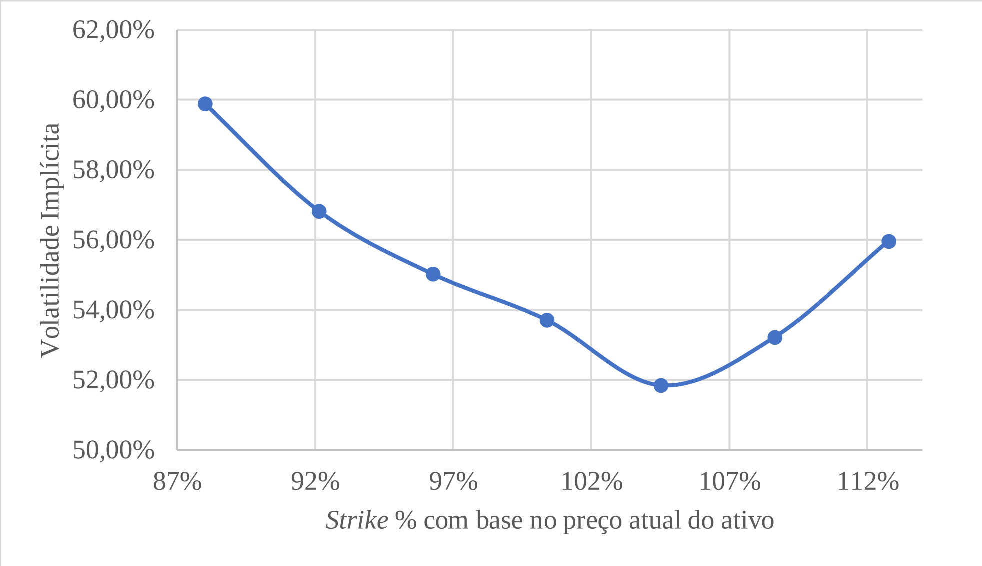

Gráfico 4: Volatilidade implícita de VVAR3 no mercado do dia 10 de setembro de 2020 para o vencimento de 21 de setembro de 2020

Fonte: Os autores com base na Bloomberg dia 10 de setembro de 2020.

Nesse caso, havia uma demanda muito alta por opções com *strikes* mais altos do que o preço atual da ação, fazendo com que a curva criasse esse formato voltado para cima nos *strikes* mais altos.

					Black-Scholes			Mercado		
SPOT	ATIVO	STRIKE	VENCIMENTO	MONEYNESS	CALL	PUT	VOL IMPLÍCITA	CALL	PUT	VOL IMPLÍCITA
18,18	VVAR3	16,00	21/set/20	88,0%	2,24	0,05	53,71%	2,33	0,08	59,89%
18,18	VVAR3	16,75	21/set/20	92,1%	1,59	0,15	53,71%	1,62	0,18	56,83%
18,18	VVAR3	17,50	21/set/20	96,3%	1,04	0,35	53,71%	1,06	0,37	55,03%
18,18	VVAR3	18,25	21/set/20	100,4%	0,62	0,68	53,71%	0,62	0,68	53,71%
18,18	VVAR3	19,00	21/set/20	104,5%	0,34	1,15	53,71%	0,32	1,12	51,85%
18,18	VVAR3	19,75	21/set/20	108,6%	0,16	1,72	53,71%	0,16	1,71	53,22%
18,18	VVAR3	20,50	21/set/20	112,8%	0,07	2,38	53,71%	0,09	2,35	55,97%

Tabela 3 – Diferença entre os preços das opções com vencimento em 21 de setembro de 2020

Fonte: Os autores com base na Bloomberg dia 10 de setembro de 2020

Outro motivo para a volatilidade em um *strike* de alta dessa ação estar mais alto que uma volatilidade em um *strike* menor é em relação ao valor absoluto de uma *call* com *strike* R$ 20,50. Pois com uma volatilidade menor ela iria menos do que R$ 0,07 e um provedor de preço no mercado pode não aceitar tomar um risco de vender um direito de compra com valor absoluto tão baixo sabendo que essa ação poderá subir rapidamente por condições de mercado e resultados da empresa.

Nos gráficos abaixo nota-se como comportamento da volatilidade implícita das opções para cada ação com vencimentos iguais não é algo padronizado.

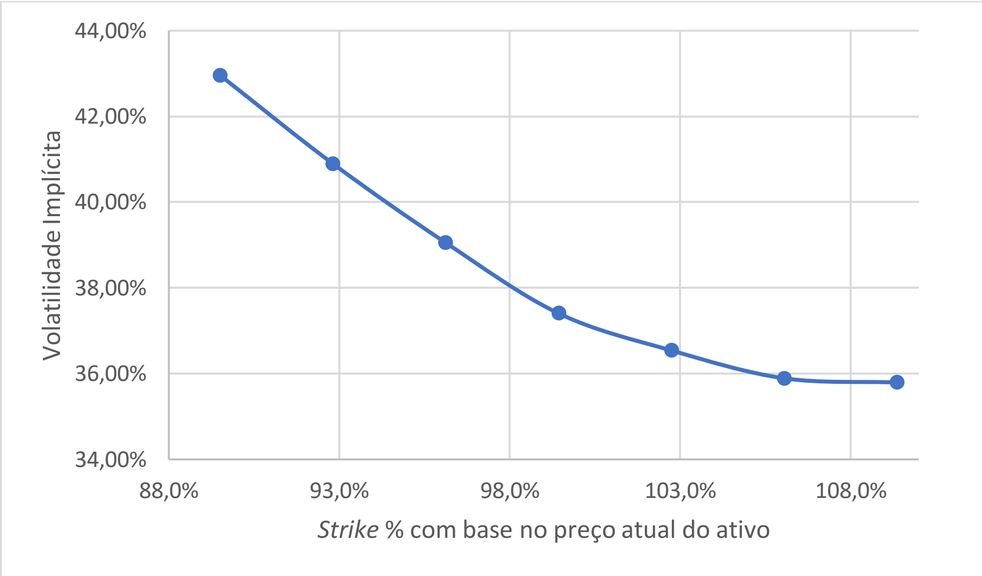

Gráfico 5: Volatilidade implícita de PETR4 no mercado do dia 09 de setembro de 2020 para o vencimento de 19 de outubro de 2020

Fonte: Os autores com base na Bloomberg dia 09 de setembro de 2020.

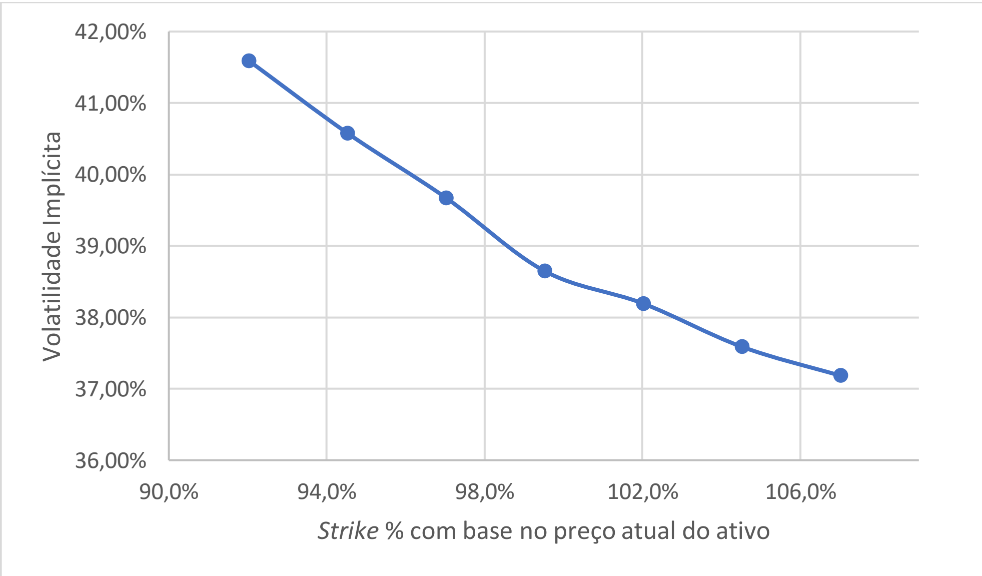

Gráfico 6: Volatilidade implícita de VALE3 no mercado do dia 09 de setembro de 2020 para o vencimento de 19 de outubro de 2020

Fonte: Os autores com base na Bloomberg dia 09 de setembro de 2020.

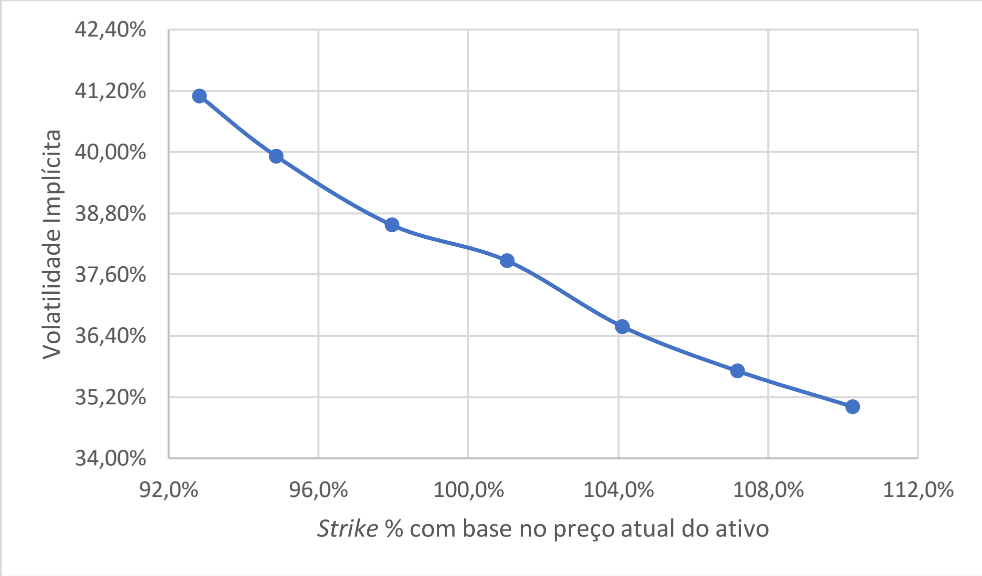

Gráfico 7: Volatilidade implícita de ITUB4 no mercado do dia 09 de setembro de 2020 para o vencimento de 19 de outubro de 2020.

Fonte: Os autores com base na Bloomberg dia 09 de setembro de 2020.

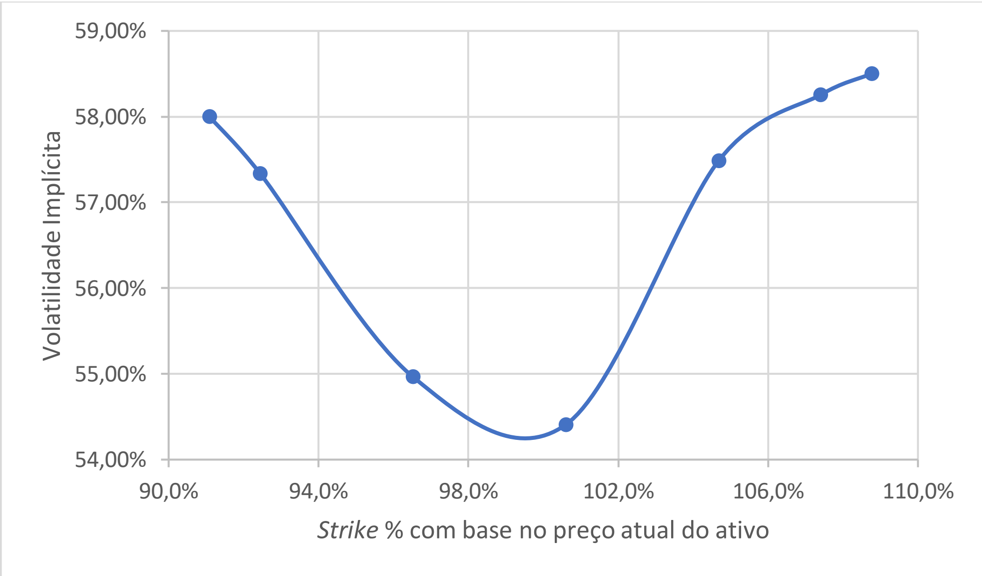

Gráfico 8: Volatilidade implícita de VVAR3 no mercado do dia 09 de setembro de 2020 para o vencimento de 19 de outubro de 2020

Fonte: Os autores com base na Bloomberg dia 09 de setembro de 2020.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O modelo Black & Scholes é uma das equações mais utilizadas atualmente no mercado financeiro Brasileiro para precificação de opções, com ele é possível encontrar o preço justo de uma opção e como proteger um portfólio de opções contra variações no preço da ação através do Delta *Hedge*. Fischer Black e Myron Scholes utilizaram algumas premissas básicas em seu modelo, sendo uma delas a volatilidade implícita constante para todos os *strikes* de uma ação para um determinado prazo.

Através do estudo realizado com cinco ações com boa liquidez no mercado brasileiro, pôde-se notar que a premissa sobre volatilidade constante não é válida para determinar o preço justo de uma opção no mercado de opções brasileiro, pois o preço real de mercado diverge do preço teórico resultante do modelo Black & Scholes quando usado a premissa de volatilidade para todos os *strikes*. Concluindo que as volatilidades de uma ação para um determinado prazo possuem uma certa inclinação e concavidade, também conhecida como *Smile.*

O *Smile* da volatilidade implícita de uma ação é criado principalmente pelo fato de o mercado acreditar que em um evento de queda de uma ação, a realização da volatilidade será muito mais alta do que em um evento de alta de uma ação, resultando em uma volatilidade maior para *strikes* mais baixos e menor para *strikes* mais altos, na maioria dos casos, podendo haver exceções por conta de uma demanda muito alta por uma opção de alta, divulgação de resultado de uma empresa, entre outros. Além disso, a volatilidade implícita é a variável mais complexa de se determinar na precificação de uma opção, pois depende de fatores de mercado, de fatos relevantes sobre a empresa que podem ocorrer até o vencimento da opção, entre outros. Portanto é importante entender o funcionamento do mercado em relação as volatilidades e o comportamento dela ao longo do tempo para uma proteção adequada de portfólio e precificação de um preço justo para uma opção.

REFERÊNCIAS

A origem da bolsa de valores. Disponível em <https://gorila.com.br/gorilando/artigos/a-origem-da-bolsa-de-valores/>. Acesso em: março 2020.

B3 - Tudo sobre a Bolsa de Valores do Brasil. 2019. Disponível em <https://blog.toroinvestimentos.com.br/b3-bolsa-de-valores-brasil>. Acesso em: março 2020.

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno.** 9. ed. Rio de Janeiro: Editora LTC, 2010.

BLACK, F; SCHOLES, M. The Pricing of Options and Corporate Liabilities. **Journal of Political Economy**. The University of Chicago Press, Vol 81, No 3, p. 637-654, Junho 1973

BOVESPA. Disponível em < http://www.b3.com.br/pt_br/>. Acesso em: março 2020.

CAVALCANTE, F; MISUMI, J; RUDGEL, L. **Mercado de Capitais:** O que é, como funciona. 6ª ed. São Paulo: Elsevier, 2005.

DERMAN, E; MILLER, M.B. **The Volatility Smile:**. 1ª ed. New Jersey: Wiley, 2016.

EISTEN, A. Zur **Theorie der brownschen Bewegung.** Annalem der Phisik, v.19, n.1 p. 371-381, 1906.

FORTUNA, Eduardo. **Mercado Financeiro**: Produtos e Serviços. 20 ª ed. São Paulo: QualityMark, 2015

GOMES, F.R. **A bolsa de Valores brasileira como fonte de informações financeiras.** Perspect. cienc. inf., Belo Horizonte, v.2, n.2, jul/dez,1997. Disponível em: <https://www.brapci.inf.br/_repositorio/2010/11/pdf_cc26aefd14_0012633.pdf>. Acesso em: março 2020.

HULL, John C. **Opções, Futuros e Outros Derivativos**. 1ª ed. São Paulo: Bookman, 2016

OLIVEIRA, G; PACHECO, M. **Mercado Financeiro:** Objetivo e Profissional. 1ª ed. São Paulo: Fundamentos, 2006.

LADSON, L. S.; WAREN, A. D.; JAIN, A.; RATNER, M. **Design and Testing of a Generalized Reduced Gradient Code for Nonlinear Programming**. ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS), 1978

WILMOTT, P. **Paul Wilmott on quantitative finance**. 2. Ed. [S.I.]: John Wiley & Sons, 2006.

WILMOTT, P .; Howison, S .; Dewynne, J. (1995), **A Matemática de instrumentos financeiros derivados:** Uma introdução Student , Cambridge University Press