

Relatório Científico
MackPesquisa

**Termodinâmica de Quase-Partículas no Plasma
de Quarks e Gluons**

Fernanda Monti Steffens

Universidade Presbiteriana Mackenzie

São Paulo – SP - Brasil

O objetivo principal do projeto apresentado em 2008 era a formulação de uma termodinâmica consistente para um plasma de quase-quarks e quase-gluons a temperatura finita T e potencial químico finito μ . Este objetivo foi atingido e neste relatório são colocados os principais passos deste desenvolvimento.

O trabalho foi baseado em uma generalização do trabalho publicado por Gardim e Steffens (Gardim2007). Neste trabalho, foi apresentada uma formulação geral de uma termodinâmica de um gás de quase-gluons a temperatura finita, onde, para tanto, foi usado um ensemble canônico. No caso em que quarks são introduzidos e que o potencial químico é finito, devemos usar o ensemble grand canônico:

$$\Phi = -T \ln Z(\mu, V, T)$$

onde Z é a função de partição e Φ é uma função a ser identificada com o grand potencial. De fato, se as massas das partículas forem independentes da temperatura e do potencial químico, então $\Phi \rightarrow \phi$ e temos a termodinâmica usual:

$$P = -\left(\frac{\partial \phi}{\partial V}\right)_{T, \mu}, \quad S = -\left(\frac{\partial \phi}{\partial T}\right)_{V, \mu}, \quad N = -\left(\frac{\partial \phi}{\partial \mu}\right)_{T, V}, \quad U = \phi + TS + \mu N$$

onde P é a pressão, S a entropia, N o número de partículas e U a energia interna do sistema. No entanto, se o Hamiltoniano depender da temperatura e/ou do potencial químico através das massas, então, tomando a derivada com respeito à temperatura e/ou o potencial químico e tomando a média, obtemos:

$$\left\langle \frac{\partial H}{\partial \mu} \right\rangle - \langle N \rangle - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \mu} \right)_{V, T} = 0.$$

$$\Phi - T \frac{\partial \Phi}{\partial T} + \mu \langle N \rangle - \langle H \rangle + T \left\langle \frac{\partial H}{\partial T} \right\rangle = 0$$

Repare que os termos envolvendo as derivadas do Hamiltoniano aparecem apenas porque as massas, agora, têm uma dependência em T e em μ . É esta dependência explícita nestas duas últimas equações que estragam a consistência termodinâmica. Para recuperar a consistência, é introduzido um termo extra às funções termodinâmicas:

$$\begin{aligned}
\Phi(V, T, \mu, m_f^2, m_b^2) &= \Phi_f(V, T, \mu, m_f^2) + \Phi_b(V, T, \mu, m_b^2) + \alpha B(V, m_f^2, m_b^2), \\
U(V, T, \mu, m_f^2, m_b^2) &= U_f(V, T, \mu, m_f^2) + U_b(V, T, \mu, m_b^2) + \eta B(V, m_f^2, m_b^2), \\
S(V, T, \mu, m_f^2, m_b^2) &= S_f(V, T, \mu, m_f^2) + S_b(V, T, \mu, m_b^2) - \frac{\gamma}{T} B(V, m_f^2, m_b^2), \\
N(V, T, \mu, m_f^2, m_b^2) &= N_{\{f\}}(V, T, \mu, m_f^2) - \frac{\lambda}{\mu} B(V, m_f^2, m_b^2),
\end{aligned}$$

Os subscritos f e b se referem a férmions e a bósons, respectivamente. As funções $m_{f,b}^2 = m_{f,b}^2(T, \mu)$ são as massas adquiridas pelos férmions e bósons. As constantes $\alpha, \eta, \gamma, \lambda$ não são arbitrárias, mas sim vinculadas pela relação $\alpha = \eta + \gamma + \lambda$. O termo $B(V, m_{f,b}^2)$ deve ser tal que as relações termodinâmicas sejam satisfeitas. Com esta imposição, tem-se que:

$$\frac{\partial}{\partial m_i^2} (BT^{-\frac{\gamma}{\alpha}} \mu^{-\frac{\lambda}{\alpha}}) = -\frac{T^{-\frac{\gamma}{\alpha}} \mu^{-\frac{\lambda}{\alpha}}}{\alpha} \left\langle \frac{\partial H_i}{\partial m_i^2} \right\rangle \quad \alpha \neq 0, \quad i = b, f.$$

No caso em que $\alpha = 0$, são necessários dois termos extras (Gardim2009):

$$\Phi = \Phi_b + \Phi_f, S = S_b + S_f - \gamma \frac{B_S}{T}, N = N_{\{f\}} - \lambda \frac{B_N}{\mu}, U = U_b + U_f - \lambda B_N - \gamma B_S,$$

$$B_S = \frac{T}{\gamma} \sum_{i=b,f} \left\langle \frac{\partial H_i}{\partial T} \right\rangle, \quad B_N = \frac{\mu}{\lambda} \sum_{i=b,f} \left\langle \frac{\partial H_i}{\partial \mu} \right\rangle \quad \alpha = 0.$$

Existe toda uma gama de soluções, portanto, que são termodinamicamente consistentes. Elas são obtidas através de escolhas diferentes para as constantes introduzidas na redefinição das funções termodinâmicas. A questão é: quais delas são fisicamente relevantes? Iremos nos ater a duas classes de soluções:

- (a) A classe usual de soluções, inspiradas pela solução original de Gorenstein e Yang (Gorenstein1995). Nesta classe, $\gamma = 0, \alpha \neq 0$
- (b) A classe de soluções com $\alpha = 0$.

Antes de explorar estas soluções, frisamos que a consistência termodinâmica não faz qualquer imposição sobre a dependência das massas com a temperatura e com o potencial químico. Usamos neste trabalho a aproximação de Hard Thermal Loop (HTL) (Braaten1992, Blaizot1999):

$$m_g^2 = \frac{m_D^2}{2} - \frac{N_c}{\pi\sqrt{2}}g^2 T m_g,$$

$$\widetilde{m}_q^2 = \frac{N_g g^2}{8N_c} \left(T^2 + \frac{\mu^2}{\pi^2} \right) - \frac{N_g \sqrt{2} g^2}{N_c 4\pi} T m_g$$

onde $N_g = N_c^2 - 1$, N_c é o número de cores, N_f é o número de sabores e m_D^2 é a massa de Debye e é dada por:

$$g^2 \left(\frac{2N_c + N_f}{6} T^2 + \frac{N_f \mu^2}{2\pi^2} \right)$$

A massa dos quarks é finalmente expressa como $m_q = \sqrt{m_0 + \widetilde{m}_q^2}$, onde m_0 é a massa nua do quark.

Soluções do tipo Gorenstein-Yang

Usando a forma encontrada para o termo extra, junto com o operador densidade $\hat{\rho}$, as funções termodinâmicas são reescritas como (Gardim2009):

$$S = - \sum_{i=b,f} \langle \ln \hat{\rho}_i \rangle$$

$$\Phi = - \sum_{i=b,f} \left(T \ln Z_i + \mu^{\frac{\lambda}{\alpha}} \int d\mu \left\langle \frac{\partial H_i}{\partial \mu} \right\rangle \mu^{-\frac{\lambda}{\alpha}} + \int dT \left\langle \frac{\partial H_i}{\partial T} \right\rangle \right) + \alpha B_0 \mu^{\frac{\lambda}{\alpha}}$$

$$N = \langle \hat{N} \rangle + \frac{\lambda}{\alpha} \mu^{-1} \sum_{i=b,f} \left(\int dT \left\langle \frac{\partial H_i}{\partial T} \right\rangle + \mu^{\frac{\lambda}{\alpha}} \int d\mu \left\langle \frac{\partial H_i}{\partial \mu} \right\rangle \mu^{-\frac{\lambda}{\alpha}} \right) - B_0 \lambda \mu^{\frac{\lambda}{\alpha}-1}$$

$$U = \sum_{i=b,f} \left[\langle \hat{H}_i \rangle - \frac{\eta}{\alpha} \left(\mu^{\frac{\lambda}{\alpha}} \int d\mu \left\langle \frac{\partial H_i}{\partial \mu} \right\rangle \mu^{-\frac{\lambda}{\alpha}} + \int dT \left\langle \frac{\partial H_i}{\partial T} \right\rangle \right) \right] + \eta B_0 \mu^{\frac{\lambda}{\alpha}}.$$

Temos duas subclasses para este tipo de solução. A primeira é a que é usada usualmente na literatura e pode ser obtida com o nosso formalismo escolhendo $\gamma = \lambda = 0, \alpha = \eta$:

$$\begin{aligned}
S &= - \sum_{i=b,f} \langle \ln \hat{\rho}_i \rangle \\
N &= \langle \hat{N} \rangle \\
\Phi &= - \sum_{i=b,f} \left(T \ln Z_i + \int d\mu \left\langle \frac{\partial H_i}{\partial \mu} \right\rangle + \int dT \left\langle \frac{\partial H_i}{\partial T} \right\rangle \right) + B_0 \\
U &= \sum_{i=b,f} \left[\langle \hat{H}_i \rangle - \mu^{\frac{\lambda}{\alpha}} \int d\mu \left\langle \frac{\partial H_i}{\partial \mu} \right\rangle \mu^{-\frac{\lambda}{\alpha}} - \int dT \left\langle \frac{\partial H_i}{\partial T} \right\rangle \right] + B_0.
\end{aligned}$$

Chamamos esta solução de GY1. A segunda subclasse é obtida escolhendo $\gamma = \eta = 0, \alpha = \lambda$. Neste caso,

$$\begin{aligned}
S &= - \sum_{i=b,f} \langle \ln \hat{\rho}_i \rangle \\
U &= \sum_{i=b,f} \langle \hat{H}_i \rangle \\
\Phi &= - \sum_{i=b,f} \left(T \ln Z_i + \mu \int d\mu \left\langle \frac{\partial H_i}{\partial \mu} \right\rangle \mu^{-1} + \int dT \left\langle \frac{\partial H_i}{\partial T} \right\rangle \right) + B_0 \mu \\
N &= \langle \hat{N} \rangle + \frac{\lambda}{\alpha} \mu^{-1} \sum_{i=b,f} \left(\int dT \left\langle \frac{\partial H_i}{\partial T} \right\rangle + \mu \int d\mu \left\langle \frac{\partial H_i}{\partial \mu} \right\rangle \mu^{-1} \right) - B_0.
\end{aligned}$$

Chamamos esta solução de GY2.

Podemos comparar ambas as soluções com o que é calculado diretamente da QCD perturbativa a temperatura e potencial químico finito para a pressão (Kajantie2003):

$$P'_{GY1} = -\frac{g^2 N_g}{32} \left\{ \frac{4N_c + 5N_f}{18} T^4 + \frac{N_f \mu^4}{2\pi^4} \right\}$$

$$P'_{GY2} = -\frac{g^2 N_g}{32} \left\{ \frac{4N_c + 5N_f}{18} T^4 + \frac{N_f \mu^4}{3\pi^4} - \frac{N_f \mu^2 T^2}{\pi^2} \right\}$$

$$P_2 = -\frac{g^2 N_g}{32} \left\{ \frac{4N_c + 5N_f}{18} T^4 + \frac{N_f}{\pi^2} \mu^2 T^2 + \frac{N_f}{2\pi^4} \mu^4 \right\}$$

A última equação é o resultado da QCD perturbativa em segunda ordem para a pressão. Repare que ambas as soluções, GY1 e GY2, falham em reproduzir o resultado da QCD perturbativa.

Soluções com $\alpha=0$

Para este caso, vamos trabalhar diretamente com a solução explícita, já que é a solução mais simples onde os termos extras não envolvem integrais na temperatura e no potencial químico. Para a pressão, a expressão fica (Gardim2009):

$$P = \frac{\pi^2 T^4}{90} \left\{ d_b + \frac{7d_f}{4} + \frac{15a^2 d_f}{2\pi^2} + \frac{15a^4 d_f}{4\pi^4} - \frac{15(d_f r_f^2 + d_b r_b^2)}{4\pi^2} - \frac{45a^2 r_f^2 d_f}{4\pi^4} + \frac{15r_b^3 d_b}{2\pi^2} + \frac{45}{8\pi^4} \left[r_f^4 d_f \left(\frac{3}{4} - \gamma_E - \ln \frac{r_f}{\pi} \right) - \frac{r_b^4 d_b}{2} \left(\frac{3}{4} - \gamma_E - \ln \frac{r_b}{4\pi} \right) \right] + \frac{105\zeta(3)d_f}{64\pi^6} (r_f^2 - a^2)^3 + \frac{45(r_f^2 - a^2)^2 d_f}{64\pi^2} \left[21\zeta(3)a^2 - \frac{31\zeta(5)}{32\pi^2} (r_f^2 - a^2)^2 \right] + \frac{45d_b}{8\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \Gamma(n + \frac{1}{2}) r_b^{2(n+2)}}{(2\pi)^{2n} \Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(n+3)} + -d_f \sum_{n=0}^{\infty} \frac{45(2n+1)^3}{2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + k)}{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(k+3)} \Re \left(\frac{a^2 - r_f^2}{[(2n+1)\pi]^2} + \frac{2ai}{(2n+1)\pi} \right)^{k+2} \right\}.$$

Aqui, $r_f = m_f/T$, $a = \mu/T$ e $d_{f,b}$ é o fator de degenerescência para os quarks e os gluons. Soluções análogas podem ser encontradas em Gardim2009 e não são escritas aqui. Como antes, podemos escrever a solução para o caso em que T é muito grande. Os termos de segunda ordem na constante de acoplamento neste caso, tanto para a pressão quanto para a entropia e para o número de partículas, são:

$$P_{\alpha=0} = -\frac{N_g g^2}{16} \left(\frac{4N + 5N_f}{18} T^4 + N_f \frac{\mu^2 T^2}{\pi^2} + \frac{N_f \mu^4}{2\pi^4} \right),$$

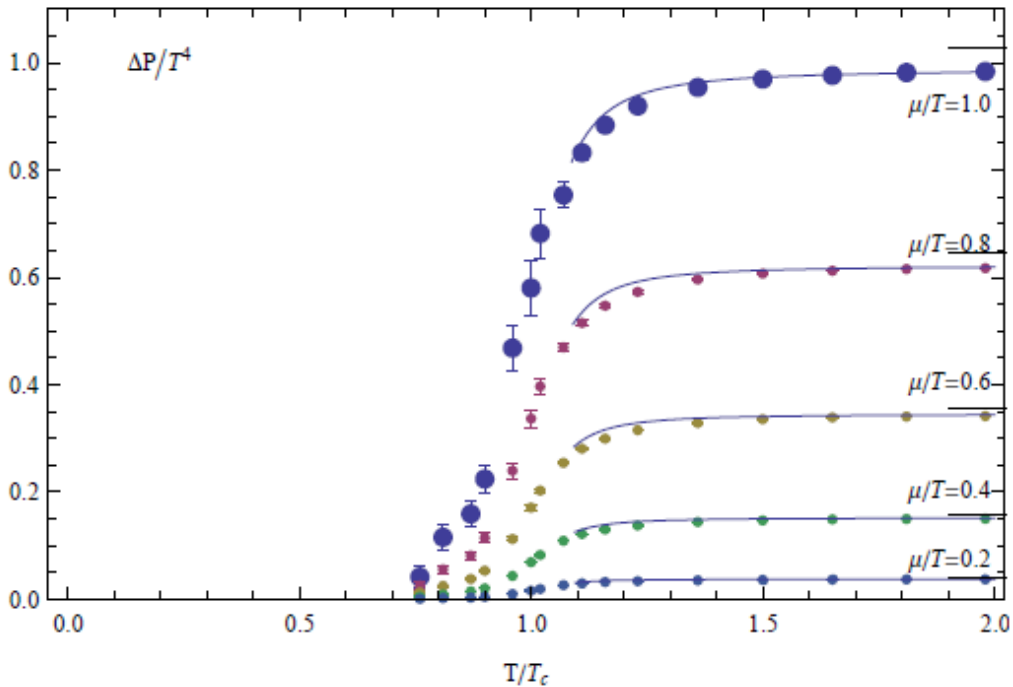
$$s_{\alpha=0} = -\frac{g^2 T N_g}{8} \left(\frac{4N + 5N_f}{9} T^2 + N_f \frac{\mu^2}{\pi^2} \right), \quad n_{\alpha=0} = -\frac{g^2 N_g N_f \mu}{8\pi^2} \left(T^2 + \frac{\mu^2}{\pi^2} \right)$$

Comparativamente, os resultados da QCD são:

$$\begin{aligned}
P_{QCD} &= \frac{\pi^2}{6} \left(\frac{7N_c N_g + 4N_g}{30} T^4 + N_f N_c \frac{\mu^2 T^2}{\pi^2} + \frac{N_f N_c \mu^4}{2 \pi^4} \right) + \\
&\quad - \frac{N_g g^2}{32} \left(\frac{4N_c + 5N_f}{18} T^4 + N_f \frac{\mu^2 T^2}{\pi^2} + \frac{N_f \mu^4}{2 \pi^4} \right); \\
s_{QCD} &= \frac{\pi^2 T}{3} \left(\frac{7N_c N_f + 4N_g}{15} T^2 + N_c N_f \frac{\mu^2}{\pi^2} \right) - \frac{g^2 T N_g}{16} \left(\frac{4N_c + 5N_f}{9} T^2 + N_f \frac{\mu^2}{\pi^2} \right); \\
n_{QCD} &= \frac{N_c N_f \mu}{3} \left(T^2 + \frac{\mu^2}{\pi^2} \right) - \frac{g^2 N_g N_f \mu}{16 \pi^2} \left(T^2 + \frac{\mu^2}{\pi^2} \right).
\end{aligned}$$

Embora exista um fator de $\frac{1}{2}$ de diferença entre os dois resultados, esta diferença é creditada a forma específica para a massa termina que usamos. Com uma redefinição da massa HTL por um fator de $\frac{1}{2}$, o resultado da solução $\alpha = 0$ concorda com a QCD.

Finalmente, também foram feitas comparações com os resultados de QCD na rede para temperaturas próximas a região de transição de fase. Detalhes podem ser encontrados na referência Gardim2009 e não são apresentados aqui. No entanto, mostramos a figura com o resultado final para a pressão para a solução $\alpha = 0$, onde é observado concordância com os cálculos da rede (Allton2005):



Referências

ALLTON, C. R. et al., Physical Review D71:054508, 2005

BLAIZOT, J. P., IANCU, E. e REBHAN, A, Physical Review Letters 83:2906, 1999

BRAATEN, E. e PISARSKI, R. D., Physical Review D45:1827, 1992]

GARDIM, F. G. e STEFFENS, F. M., Nuclear Physics A797:50-66, 2007

GARDIM, F. G. e STEFFENS, F. M., Nuclear Physics A825:222-244, 2009

GORENSTEIN, M. I. e YANG, S. N., Physical Review D52:5206, 1995

KAJANTIE, K. et al., Physical Review D67:105008, 2003