UNIVERSIDADE PRESBITERIANA MACKENZIE
FACULDADE DE COMPUTAÇÃO E INFORMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

MURILO KENICHI FUJII

RESOLVENDO PROBLEMAS DE GEOMETRIA POR MEIO DO *SOFTWARE* GEOGEBRA

SÃO PAULO
2024

MURILO KENICHI FUJII

RESOLVENDO PROBLEMAS DE GEOMETRIA POR MEIO DO *SOFTWARE* GEOGEBRA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Presbiteriana Mackenzie como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciado em Matemática, orientado pela Prof. Dra. Eriko Matsui Yamamoto.

SÃO PAULO

2024

MURILO KENICHI FUJII

RESOLVENDO PROBLEMAS DE GEOMETRIA POR MEIO DO *SOFTWARE* GEOGEBRA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Presbiteriana Mackenzie como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciado em Matemática, orientado pela Prof. Dra. Eriko Matsui Yamamoto.

Aprovado em____de__________________de 2024.

BANCA EXAMINADORA

____

Profa. Dra. Eriko Matsui Yamamoto – Orientadora
Universidade Presbiteriana Mackenzie

____

Profa. Dra. Vera Lucia Antonio Azevedo
Universidade Presbiteriana Mackenzie

____

Prof. Dr. Ariovaldo José de Almeida
Universidade Presbiteriana Mackenzie

Dedico este trabalho ao meu pai, que despertou em mim o interesse pela Matemática, e também ao meu filho, na esperança de que ele possa, também, descobrir e apreciar a beleza da Matemática.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de registrar um agradecimento especial:

à minha orientadora, Professora Eriko, pela paciência, apoio e confiança ao longo do desenvolvimento deste estudo;

à minha querida esposa, Tatiane, pelo suporte e companheirismo ao longo de mais esta aventura;

aos amigos Bruno, Rubens e Camila, por tornar mais divertido o percurso até este momento;

aos meus amigos Montanha, Jesus, Russo e Bolão, pela parceria ao longo de todos esses anos e por me ajudarem a crescer em matemática.

A todos vocês, meu muito obrigado.

“Não é o conhecimento, mas o ato de aprender; não a posse mas o ato de chegar lá, que concede a maior satisfação.”

(Gauss, Carl Friedrich)

RESUMO

Este estudo se propõe a investigar o potencial do *software* GeoGebra na resolução de problemas de geometria do ensino básico, com a esperança de impulsionar avanços no ensino dessa disciplina. Para tanto, foi examinada a importância do ensino da geometria, enfatizando sua relevância em diversas áreas e explorando os benefícios proporcionados pelo seu aprendizado, como o desenvolvimento do pensamento espacial e do raciocínio lógico. Além disso, destacamos o papel dos recursos didáticos e da tecnologia na promoção de uma abordagem dinâmica e interativa para o ensino da geometria, evidenciando o GeoGebra como uma ferramenta fundamental para o aprendizado ativo em Matemática. Foi realizada uma pesquisa bibliográfica desses temas, complementada pela coleta de problemas de geometria do ensino básico. Em seguida, foi feita uma comparação entre doismétodos de resolução: um baseado em conceitos geométricos, teoremas e raciocíniológico-dedutivo; e outro realizado por meio do GeoGebra. Essa comparação teve como objetivo contrastar os recursos necessários para alcançar as soluções de cadaproblema, considerando a quantidade de conceitos e passos envolvidos. Em conjunto, as reflexões apresentadas neste trabalho buscam fornecer *insights* sobre estratégiase ferramentas para aprimorar tanto o ensino quanto a aprendizagem da geometria nocontexto educacional.

Palavras-Chave: Geometria, Ensino de Matemática, Recursos Didáticos, *Software* GeoGebra, Educação Matemática.

ABSTRACT

This study aims to investigate the potential of the GeoGebra software in solving basic geometry problems, with the hope of driving advancements in the teaching of this discipline. To do so, the importance of teaching geometry was examined, emphasizing its relevance in various areas and exploring the benefits provided by its learning, such as the development of spatial thinking and logical reasoning. Additionally, we highlight the role of educational resources and technology in promoting a dynamic and interactive approach to geometry teaching, showcasing GeoGebra as a fundamental tool for active learning in Mathematics. A bibliographic research on these topics was conducted, complemented by the collection of basic geometry problems. Subsequently, a comparison was made between two resolution methods: one based on geometric concepts, theorems, and deductive reasoning; and another performed through GeoGebra. This comparison aimed to contrast the resources required to achieve the solutions to each problem, considering the quantity of concepts and steps involved. Together, the reflections presented in this work seek to provide insights into strategies and tools to enhance both the teaching and learning of geometry in the educational context.

Keywords: Geometry, Mathematical Education, Didactic Resources, GeoGebra Software, Mathematical Learning.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE FERRAMENTAS DO GEOGEBRA

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

A geometria é a área da matemática que estuda as propriedades, formas, tamanhos e relações espaciais dos objetos. Ela desempenha um papel fundamental para a compreensão do mundo ao nosso redor e é usada em uma variedade de campos, tais como engenharia, arquitetura, física, astronomia, design gráfico, computação gráfica e outros. Conceitos como: pontos, retas, planos, ângulos, polígonos, circunferências, círculos, área, volume são exemplos da maneira como a geometria foi sendo desenvolvida para descrever e analisar os objetos e as formas no nosso mundo.

Este trabalho busca explorar o uso da tecnologia no ensino básico visando contribuir para avanços no processo de ensino e aprendizagem e, mais especificamente, o uso do *software* GeoGebra e suas potencialidades no ensino da geometria. Para tanto, este texto está estruturado em cinco capítulos:

1. Introdução, que contém a justificativa, objetivos e metodologia;
2. Referencial Teórico, que trata dos apontamentos que justificam o uso das tecnologias para o aprendizado.
3. GeoGebra, no qual são apresentadas a justificativa de escolha da plataforma, suas alternativas e as ferramentas usadas ao longo deste trabalho;
4. Resolvendo Problemas de Geometria, em que são apresentados os problemas pesquisados e as propostas de resolução, buscando contrastá-las: uma por meio de conceitos geométricos, teoremas e raciocínio lógico-dedutivo; e outra por meio do GeoGebra;
5. Considerações Finais, concluindo este estudo.

1.1. JUSTIFICATIVA E RELEVÂNCIA

A compreensão da Geometria na Matemática é de vital importância para que se entendam os conceitos mais fundamentais de temas mais refinados em, por exemplo, Álgebra, Cálculo, Topologia. Contudo, ao longo do Ensino Básico, o rigor formal e a linguagem podem distanciar o estudante desse tema e, consequentemente, fazendo-o se desinteressar completamente, o que é potencialmente prejudicial no futuro. Como, então, o desenvolvimento da linguagem associada chegou ao que conhecemos? Será realmente necessário todo esse rigor? Ou há um meio de entender problemas complexos de uma maneira mais leve e interativa?

Conforme a Base Nacional Comum Curricular, está, dentre as competências da Matemática,

> Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho. (BRASIL, 2018, p.267)

Lorenzato (1995) destaca a importância da Geometria na escola, argumentando que seu estudo é fundamental para o desenvolvimento do pensamento geométrico e raciocínio visual. A Geometria é considerada um fator facilitador para a compreensão e resolução de questões em diversas áreas do conhecimento humano. A presença da Geometria em situações cotidianas é ressaltada, e a aprendizagem geométrica é considerada essencial para o desenvolvimento da percepção espacial, tanto em Matemática quanto na leitura e escrita. Lorenzato (1995) também menciona pesquisas psicológicas que corroboram a importância da Geometria no processo de aprendizagem e, além disso, destaca o papel da Geometria como um excelente meio para a construção do conhecimento, valorizando a descoberta, conjectura e experimentação. Exemplos práticos, como o problema dos coelhos e galinhas, são apresentados para ilustrar como a Geometria pode ser aplicada de maneira criativa. Ainda conforme Lorenzato (1995), a Geometria é vista como um apoio às outras disciplinas, esclarecendo situações abstratas e facilitando a comunicação de ideias matemáticas: a conexão didático-pedagógica da Geometria com a Aritmética e a

Álgebra é destacada, ressaltando a capacidade dessa disciplina de esclarecer e traduzir conceitos, propriedades e questões para os aprendizes.

O ensino da geometria desempenha um papel fundamental na formação do estudante por várias razões:

- Desenvolvimento do Pensamento Espacial: a geometria ajuda os estudantes a desenvolver a capacidade de visualizar, compreender e manipular objetos e formas no espaço tridimensional. Isso promove o pensamento espacial, que é essencial em muitas outras áreas, como arquitetura, design, engenharia, medicina.
- Raciocínio Lógico e Dedutivo: o estudo da geometria envolve a aplicação de raciocínio lógico e dedutivo para resolver problemas geométricos e provar teoremas. Essas habilidades são transferíveis para outras disciplinas e são valiosas em situações cotidianas que requerem resolução de problemas.
- Promoção da Abstração Matemática: a geometria fornece um contexto no qual os estudantes podem começar a explorar conceitos abstratos. Eles aprendem a representar e manipular figuras geométricas usandosímbolos, equações e coordenadas, o que é uma habilidade fundamental em matemática.
- Aplicações Práticas: a geometria tem uma ampla gama de aplicações práticas em campos como arquitetura, engenharia civil, design de produtos, cartografia, astronomia. Compreender princípios geométricos é essencial para o sucesso nessas áreas.
- Desenvolvimento da Resolução de Problemas: resolver problemas geométricos requer a aplicação de múltiplas estratégias e a persistência na busca por soluções. Isso ajuda os estudantes a desenvolver habilidades de resolução de problemas que podem ser usadas em diversas situações.
- Promoção da Criatividade: a geometria também estimula a criatividade, especialmente na criação de desenhos geométricos e construções. Os estudantes têm a oportunidade de explorar a estética das formas e das proporções.

- Conexão com Outras Disciplinas: a geometria não está isolada: ela se conecta com outras áreas da matemática, como álgebra, trigonometria e cálculo, além de várias disciplinas científicas e técnicas de fora da matemática. Ter uma base sólida em geometria é fundamental para avançar em muitos campos acadêmicos e profissionais.
- Preparação para Testes e Exames: muitos sistemas de educação, testes padronizados e exames de admissão incluem questões de geometria. Portanto, o estudo da geometria prepara os estudantes para essas avaliações importantes.
- Cidadania Informada: o entendimento dos princípios geométricos também é útil para a interpretação de mapas, gráficos estatísticos e informações espaciais em notícias e pesquisas científicas, contribuindo para a formação dos estudantes quanto cidadãos.

Dessa maneira, a relevância do ensino da geometria consiste na forma como contribui para o estudante desenvolver uma variedade de habilidades cognitivas, em como promove a compreensão do mundo ao redor, e em como prepara o estudante para carreiras em várias áreas, além de contribuir para sua formação geral quanto indivíduos capazes de pensar criticamente e resolver problemas complexos.

1.2. OBJETIVOS

Este trabalho busca explorar o potencial do *software* GeoGebra na resolução de problemas de Matemática do ensino básico e servir como material de apoio a professores de Matemática.

De modo mais específico, o tema abordado é a resolução de problemas de geometria, buscando contrastar uma resolução tradicional, com todo o conjunto de conhecimentos e raciocínios necessários para elaborá-la, e uma resolução por meio do *software*. A esperança é conseguir contribuir para avanços no ensino da Geometria no ensino básico. Para tanto, foram consultados, principalmente, livros, artigos e revistas da comunidade matemática.

1.3. METODOLOGIA

Foi realizada uma pesquisa bibliográfica sobre o tema bem como o levantamento de problemas de geometria no ensino básico. Para tanto, foram consultados livros, periódicos, artigos, edições de olimpíadas de matemática. Ao final das resoluções propostas para cada problema escolhido neste trabalho, foi feita uma comparação de forma simples entre essas resoluções no sentido de contrastar a complexidade de cada resolução com relação à quantidade de conceitos necessários e à quantidade de passagens para se resolver cada problema.

Conforme Souza et al. (2021), a pesquisa bibliográfica é uma etapa essencial no processo de pesquisa científica, realizada por meio da análise de obras já publicadas. Essa abordagem ajuda na escolha do problema de pesquisa, método e base teórica, além de fornecer uma compreensão aprofundada do fenômeno em estudo. Utiliza diversos recursos, como livros, artigos, teses e leis. Essa pesquisa é fundamental no início do trabalho científico e contribui para o embasamento teórico, levantando informações relevantes para o desenvolvimento da pesquisa. Os benefícios incluem baixo custo e acesso fácil a uma ampla gama de obras, enquanto os desafios envolvem a necessidade de uma análise criteriosa das fontes para evitar dados infundados e a possível limitação de informações em temas com poucas obras publicadas, comprometendo a qualidade da pesquisa.

2. REFERENCIAL TEÓRICO

2.1. O ENSINO DE MATEMÁTICA NO BRASIL

O Brasil enfrenta desafios significativos no ensino de matemática, refletindo-se em deficiências educacionais que se estendem por toda a educação básica. A qualidade do ensino de matemática é essencial, não apenas para o desenvolvimento acadêmico dos estudantes, mas também para a formação de cidadãos capazes de enfrentar os desafios contemporâneos.

Os resultados do Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB) evidenciam um panorama desafiador (GONÇALVES, 2022). Apenas uma minoria dos estudantes brasileiros alcança níveis adequados de aprendizado em matemática, com uma queda significativa ao longo dos anos de escolaridade. A defasagem histórica foi exacerbada pela pandemia de COVID-19, que agravou as disparidades educacionais existentes. Mesmo com os esforços para manter a estabilidade, o desempenho no Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA) em 2022 permanece abaixo da média global, revelando um déficit no ensino de matemática.

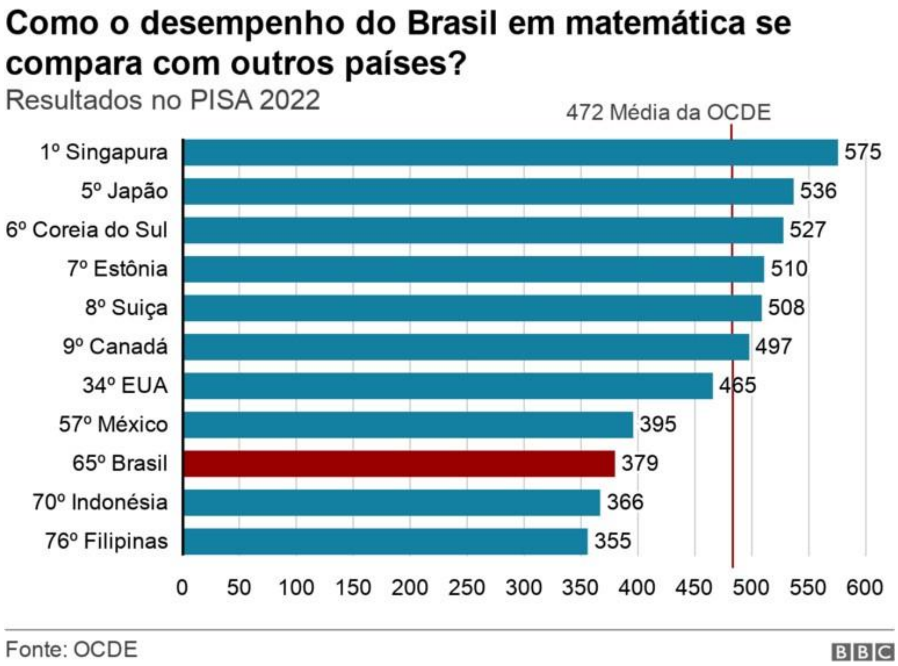

Figura 1 – Resultados no PISA 2022
Fonte: BBC News Brasil. Disponível em: https://www.bbc.com/portuguese/articles/cv2zx819rg4o

Várias causas contribuem para os desafios enfrentados no ensino de matemática no Brasil. A falta de recursos didáticos e a abordagem tradicional predominante nas escolas públicas limitam a eficácia do ensino, tornando difícil para os alunos compreenderem conceitos abstratos sem conexão com a vida cotidiana. Além disso, a desvalorização dos professores e a falta de formação adequada impactam negativamente na qualidade do ensino (Matific Content Team, 2023). A crença generalizada que permeia os estudantes de que a matemática é uma disciplina difícil também influencia a atitude deles em relação à matéria, criando barreiras adicionais ao aprendizado.

Embora os desafios sejam significativos, existem perspectivas promissoras para melhorar o ensino de matemática no Brasil. Investimentos adequados em educação, conforme proposto no Plano Nacional de Educação (PNE), podem fornecer os recursos necessários para transformar o sistema educacional (CARA, 2023). Estratégias inclusivas e políticas voltadas para a valorização dos professores são fundamentais para promover uma mudança duradoura. Além disso, a implementação de abordagens pedagógicas inovadoras e o uso de tecnologias educacionais podem tornar o ensino de matemática mais envolvente e relevante para os alunos, estimulando seu interesse e melhorando seu desempenho.

O ensino de matemática no Brasil enfrenta desafios complexos, mas não insuperáveis. Identificar as raízes dos problemas e buscar soluções eficazes são passos essenciais para melhorar a qualidade da educação matemática e garantir oportunidades iguais de aprendizado para todos os estudantes. Com o comprometimento de todas as partes interessadas, é possível transformar o cenário educacional e preparar os alunos para os desafios do século XXI.

2.2. RECURSOS DIDÁTICOS

O uso de recursos didáticos e tecnologia desempenha um papel significativo no processo de aprendizado em geometria, proporcionando uma abordagem mais dinâmica, interativa e visual para os estudantes. De acordo com Pais (2000), os recursos didáticos englobam uma variedade de elementos empregados como instrumentos experimentais na estruturação do processo de ensino e aprendizagem e têm o propósito de atuar como uma interface mediadora, facilitando a interação entre professor, aluno e o conhecimento em momentos específicos do desenvolvimento do saber; são concebidos pedagogicamente para facilitar o processo de aquisição de conhecimento.

Pais (2000), ainda, destaca duas distintas perspectivas sobre o uso de materiais didáticos no ensino da geometria: uma delas considera os conceitos geométricos como entidades platônicas puramente racionais, acessíveis apenas por meio de métodos axiomáticos formais; a outra, reduz o ensino da geometria a um conhecimento predominantemente sensorial, baseado na manipulação de modelos materiais e desenhos. Nesse cenário, Pais (2000) faz apontamentos para que o uso de materiais didáticos na geometria seja acompanhado por uma reflexão pedagógica para evitar a permanência em realismo ingênuo ou empirismo, promovendo a construção de um aspecto racional, buscando superar a aparente dualidade entre condições concretas dos recursos didáticos e condições abstratas das noções geométricas, promovendo um racionalismo aberto e dialógico. A importância tanto da abordagem dedutiva quanto da experimental no ensino fundamental da geometria é enfatizada, sem priorizar uma sobre a outra.

O ensino de matemática nos anos iniciais apresenta desafios educacionais consideráveis, especialmente no que se refere à seleção e uso adequado de recursos didáticos. Um estudo realizado por Passos e Takahashi (2018) analisou o perfil educacional e profissional de professores atuantes nesse nível de ensino, revelando uma diversidade de formações e experiências. Uma lacuna identificada foi a falta de formação específica em recursos didáticos essenciais para o ensino de matemática nos anos iniciais. Além disso, o estudo abordou os critérios utilizados por esses professores na seleção de recursos didáticos, apontando uma variedade de considerações, que vão desde a disponibilidade de materiais até o engajamento dos alunos. No entanto, a análise dessas escolhas indicou uma falta de clareza e fundamentação teórica, com influências administrativas e experiências anteriores desempenhando um papel significativo. A ausência de formação em recursos didáticos essenciais ressalta a necessidade urgente de melhorias na formação inicial e continuada dos professores nesse aspecto.

2.3. TECNOLOGIAS DA INFORMAÇÃO E COMUNICAÇÃO

Euzébio (2018) afirma que a expressão "Tecnologias da Informação e Comunicação" (TICs) surgiu em pesquisas educacionais, resultando da união das tecnologias computacionais, anteriormente chamadas de informática, com as tecnologias da comunicação, abrangendo telecomunicações e mídias eletrônicas. No contexto das TICs, Euzébio (2018) argumenta, citando Kenski (2012) e Santos (2016), sobre a importância fundamental das tecnologias na educação, mas que, ao utilizar computadores, é fundamental não apenas possuir a máquina, mas também saber usá-la de maneira adequada. Além disso, enfatiza que não é suficiente apenas oferecer mídias educativas, como software de ensino, computadores e projetores de multimídia: o uso dessas tecnologias, por si só, não garante a construção do conhecimento pelos alunos; os professores devem aproveitar as TICs com objetivos organizados, criando situações didáticas que abordem conteúdos matemáticos, promovendo o desenvolvimento do raciocínio lógico-dedutivo dos alunos e capacitando-os a resolver problemas.

Lopes (2013) discute a presença da linguagem digital, representada por múltiplas Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC), na educação e também destaca a importância de utilizar recursos digitais, como computadores e internet, para enriquecer o processo de ensino e aprendizagem. A abordagem destaca que o uso adequado das TIC pode transformar as relações entre professores e alunos, aprofundando o entendimento dos conteúdos estudados. No contexto da Matemática, ressalta-se a relevância de os professores dominarem ferramentas digitais, especialmente aquelas relacionadas à geometria dinâmica. Em seu artigo, Lopes (2013) explora a ideia de que a interatividade, o controle utilizável dos ambientes de aprendizagem e a conectividade são aspectos essenciais para transformar a experiência de fazer e aprender matemática. Além disso, destaca a importância de atividades de investigação e de construção do conhecimento por meio de *softwares* específicos, como o GeoGebra, que proporcionam dinamismo e interação na aprendizagem da geometria.

2.4. GEOMETRIA DINÂMICA E O GEOGEBRA

Conforme Isotani (2005 apud PETLA, 2008), Geometria Dinâmica (GD) é um termo que se refere à geometria implementada em computador, permitindo movimento contínuo e manipulação direta de objetos geométricos sem perder suas propriedades originais. Ao contrário da geometria tradicional estática de régua e compasso, na GD, a característica dinâmica possibilita a transição suave entre desenhos, tornando a análise mais flexível. O termo destaca-se na oposição à geometria estática, permitindo explorar situações anteriormente inimagináveis. Exemplos incluem a manipulação de elementos geométricos e o estudo de funções, com destaque para *softwares* como o GeoGebra.

Petla (2008) argumenta que o Geogebra é uma ferramenta de geometria dinâmica que permite a construção e manipulação de objetos geométricos, como pontos, vetores e, também, funções. Além das ferramentas tradicionais de geometria, o programa incorpora recursos avançados de álgebra e cálculo, possibilitando a inclusão de equações e coordenadas, o manuseio de variáveis e a realização de operações como derivação e integração. A integração de ferramentas geométricas e algébricas no Geogebra oferece uma abordagem didática eficaz, apresentando simultaneamente representações geométricas e algébricas de objetos. O programa se destaca no cenário de softwares educacionais devido à sua condição de *software* livre, sendo acessível em várias plataformas e, inclusive, em versão *online*.

De acordo com Nascimento (2012), o uso de softwares de geometria dinâmica no ensino de geometria pode beneficiar a visualização geométrica, promovendo o desenvolvimento da habilidade de visualizar. Fornecer aos alunos materiais de apoio baseados em elementos concretos do objeto geométrico em estudo é essencial, especialmente no ensino fundamental e médio, onde o trabalho com modelos sólidos e materiais visuais é fundamental. D´Ambrosio (1986 apud NASCIMENTO, 2012) destaca que os alunos, muitas vezes, estão mais familiarizados com o uso de tecnologias, como computadores e softwares, do que os próprios professores, dada a crescente exposição das crianças e jovens a essas tecnologias em jogos e atividades de entretenimento. Além disso, Nascimento (2012) destaca a aplicação prática em sala de aula para o estudo da Geometria e Desenho Geométrico. *Softwares* educativos, como o GeoGebra, oferecem oportunidades de simulação de materiais concretos, proporcionando situações virtuais próximas à realidade e promovendo possibilidades de colaboração.

"O software GeoGebra, com suas infinitas possibilidades, permite ao professor trabalhar com seus alunos em conteúdos importantes da geometria e de funções de variável real" (GRAVINA, 2011, p. 9)

2.5. SÍNTESE

Podemos afirmar que o uso de recursos didáticos e tecnologia desempenha um papel de grande importância no ensino de geometria, proporcionando uma abordagem dinâmica e interativa para os estudantes. Os recursos didáticos atuam como instrumentos experimentais, mediando a interação entre professor, aluno e conhecimento. Existem duas perspectivas sobre o uso de materiais didáticos na geometria, uma enfatizando a abordagem formal e racional, enquanto a outra destaca a abordagem sensorial e experimental. É essencial uma reflexão pedagógica para evitar extremos e promover um racionalismo aberto. A importância das tecnologias da informação e comunicação (TICs) na educação é evidenciada, mas é ressaltado que seu uso deve ser orientado por objetivos organizados. A geometria dinâmica, especialmente com ferramentas como o GeoGebra, é destacada como uma maneira eficaz de promover a interatividade e o aprendizado ativo na matemática.

3. GEOGEBRA

O GeoGebra é um *software* educacional e de matemática criado por Markus Hohenwarter e que se destaca por promover, por meio de elementos visuais, o ensino e a aprendizagem da geometria e de outras áreas da matemática. Conforme Araújo (2010), sua principal característica é a integração de várias representações matemáticas, tais como gráficos, álgebra, tabelas e geometria. Sobre o GeoGebra, podemos, ainda, dizer, com base no artigo de Nascimento (2012):

- Ferramenta de Geometria Dinâmica: é amplamente conhecido por sua capacidade de criar construções geométricas dinâmicas. Isso significa que os estudantes e professores podem criar figuras geométricas, mover pontos, segmentos e formas, e observar como as mudanças afetam as relações geométricas em tempo real. Isso torna a geometria mais visual e interativa, facilitando a compreensão dos conceitos geométricos.
- Exploração de Teoremas e Propriedades: é possível explorar e demonstrar teoremas e propriedades geométricas de maneira interativa. Os estudantes podem criar construções que ilustram conceitos como o teorema de Pitágoras, as propriedades dos triângulos e quadriláteros, entre outros.
- Ensino e Aprendizagem Assistida por Computador: é uma ferramenta valiosa para professores de matemática, pois permite criar materiais de ensino interativos e personalizados. Os professores podem projetar atividades que envolvam a exploração e a resolução de problemas geométricos usando o *software*.
- Integração de Álgebra e Geometria: é uma vantagem a sua capacidade de combinar representações algébricas e geométricas em uma única plataforma. Isso permite que os estudantes explorem as relações entre equações e gráficos, assim como a geometria associada a essas representações.
- Ferramenta de Modelagem Matemática: há também uma utilidade em contextos de modelagem matemática, permitindo aos estudantes criar modelos geométricos para representar situações do mundo real. Isso

ajuda a relacionar a matemática com aplicações práticas e torna o aprendizado mais significativo.

- Acesso Universal: é uma ferramenta de código aberto e está disponível gratuitamente. Isso significa que estudantes e educadores em todo o mundo têm acesso a uma ferramenta poderosa para explorar a geometria e outras áreas da matemática.

Dessa maneira, podemos afirmar que há uma sinergia entre geometria e o GeoGebra: o *software* amplia as possibilidades de ensino e aprendizagem da geometria, tornando-a mais acessível, interativa e envolvente. Ele ajuda os estudantes a visualizarem conceitos geométricos de maneira dinâmica e a explorarem relações matemáticas complexas. Além disso, o GeoGebra facilita a criação de recursos educacionais personalizados que atendem às necessidades individuais dos estudantes e promovem uma compreensão mais profunda da geometria.

Dentre as principais alternativas ao GeoGebra estão:

- <u>Desmos</u>: é uma ferramenta online de gráficos e cálculos interativos. Ela é especialmente útil para visualização de funções matemáticas e é amplamente utilizada para ensino de matemática.
- <u>Wolfram Alpha</u>: Embora não seja exclusivamente uma ferramenta de geometria dinâmica, o *Wolfram Alpha* é uma poderosa *engine* computacional que pode realizar cálculos e resolver equações matemáticas complexas.
- <u>Cinderella</u>: é um *software* de geometria interativa que permite a construção e manipulação de figuras geométricas de maneira dinâmica.
- <u>Cabri Geometry</u>: é um *software* que oferece ferramentas dinâmicas para exploração e construção de geometria.
- <u>GCL – Geometry Constructions Lite</u>: é uma aplicação móvel para iOS e Android que permite a construção de figuras geométricas de maneira interativa.

Por fim, Nascimento (2012, p.115) afirma “De maneira geral, a utilização do *software* foi considerada pelos alunos como sendo de fácil compreensão e assimilação." em seu artigo "Avaliação do uso do *software* GeoGebra no ensino de geometria: reflexões da prática na escola". O que traz uma validação positiva para a escolha da plataforma para desenvolver este trabalho.

3.1 GEOGEBRA DISCOVERY

Conforme Souza (2023), recentemente, foi incorporada ao Geogebra uma coleção de recursos e comandos, conhecidas como *Automated Reasoning Tools* (ART), que possibilitam verificar teoremas e proposições da Geometria Euclidiana nas figuras construídas pelos usuários. Essa nova versão do Geogebra é conhecida como Geogebra Discovery e, dessa forma, é possível que os usuários descubram e verifiquem por si mesmos as propriedades reveladas pelo *software* quanto aos elementos que compõem as construções geométricas. Souza, ainda, destaca que as ARTs existentes são:

- *Relation*: Retorna respostas numéricas, afirmando ou negando a possibilidade das relações ocorrerem.
- *LocusEquation*: Permite obter uma equação implícita de um ponto, dada uma propriedade a ser validada.
- *Prove* e *ProveDetails*: O usuário digita um comando e insere uma conjectura, obtendo como resposta verdadeiro ou falso.
- *Discover*: Aplicado a um ponto específico, busca automaticamente possíveis relações geométricas envolvendo os objetos da construção realizada.
- *Compare*: Permite comparar duas grandezas geométricas, procurando uma relação entre elas.

O GeoGebra Discovery oferece uma abordagem dinâmica e interativa para o ensino de geometria. Sua plataforma interativa permite que os estudantes explorem visualmente os conceitos geométricos, experimentando diversas configurações e manipulando elementos geométricos. Além disso, essa versão do GeoGebra oferece a verificação imediata de teoremas e proposições geométricas, facilitando a descoberta de padrões e relações entre elementos, o que estimula o pensamento crítico e a resolução de problemas. Por ser uma plataforma *online* gratuita, o

GeoGebra Discovery é acessível, o que facilita sua integração ao currículo escolar. Essas características tornam o GeoGebra Discovery um recurso didático valioso para tornar o ensino da geometria mais envolvente e eficaz.

3.2 FERRAMENTAS DO GEOGEBRA CLÁSSICO

Ao abrir o GeoGebra Clássico, disponível em https://www.geogebra.org/classic?lang=pt_PT na versão online, a seguinte interface e barra de ferramentas são mostradas:

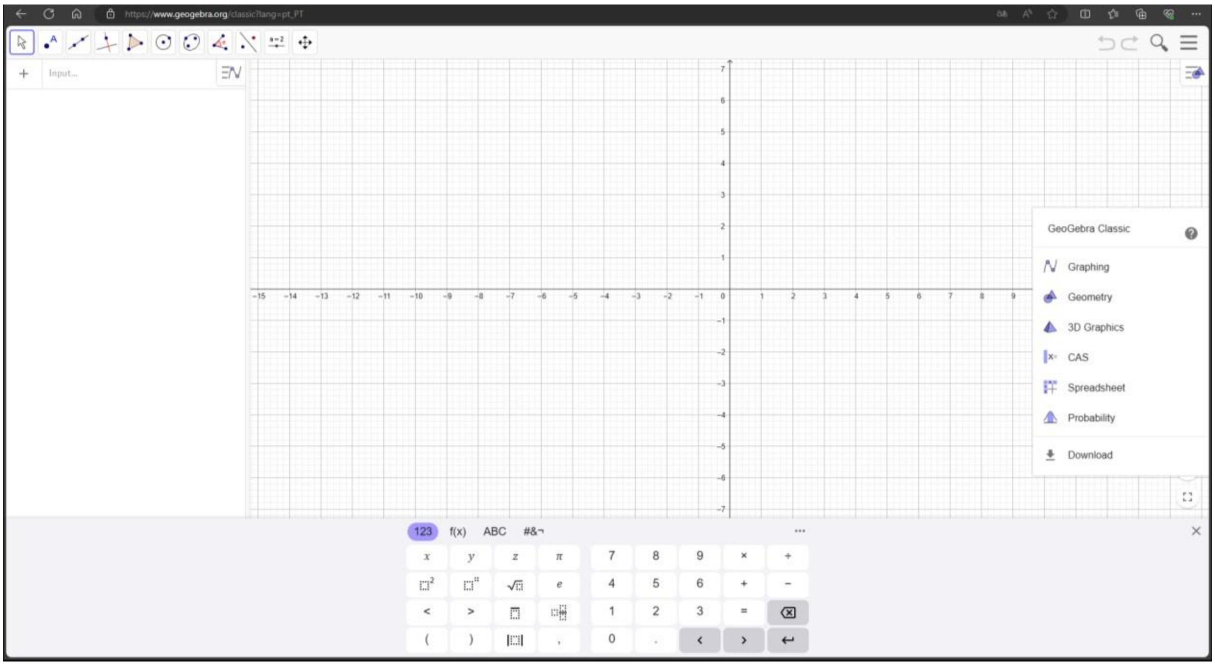

Figura 2 – Interface do GeoGebra Clássico
Elaborado pelo autor

Figura 3 – Barra de Ferramentas do GeoGebra Clássico
Elaborado pelo autor

Na figura 3, observa-se 11 botões e, ao clicar nesses botões, janelas com o menu das ferramentas disponíveis são exibidas. Na janela 1, da esquerda para direita, estão disponíveis as ferramentas: “Mover”, “Função à Mão Livre” e “Caneta”.

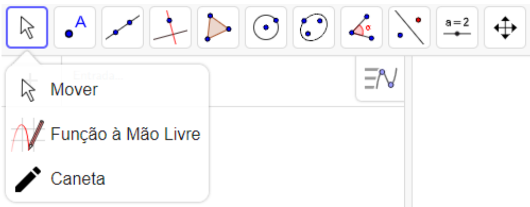

Figura 4 – Janela 1: Mover
Elaborado pelo autor

3.2.1 Ferramenta “Mover” (F11): permite selecionar e arrastar um objeto.

3.2.2 Ferramenta “Função à Mão Livre” (F12): permite esboçar funções ou desenhar formas como círculos, segmentos e polígonos à mão livre, os quais são reconhecidos e convertidos em formas exatas. Com uma função criada, é possível calcular seu valor em um ponto específico, adicionar pontos ou realizar transformações.

3.2.3 Ferramenta “Caneta” (F13): permite adicionar notas e desenhos à mão livre, sendo útil para apresentações ou quadros interativos multimídia. Ao ativar a ferramenta, o usuário pode desenhar na tela com o mouse ou a tela sensível ao toque.

Na janela 2, da esquerda para direita, estão disponíveis as ferramentas: “Ponto”, “Ponto em Objeto”, “Vincular / Desvincular Ponto”, “Intersecção de Dois Objetos”, “Ponto Médio ou Centro”, “Número Complexo”, “Otimização” e “Raízes”.

Figura 5 – Janela 2: Pontos
Elaborado pelo autor

3.2.4 Ferramenta “Ponto” (F21): permite criar um novo ponto.

3.2.5 Ferramenta “Ponto em Objeto” (F22): permite criar um ponto fixado a um objeto, por exemplo: reta, circunferência, polígono.

3.2.6 Ferramenta “Vincular / Desvincular Ponto” (F23): permite vincular ou desvincular um ponto a um caminho ou região.

3.2.7 Ferramenta “Intersecção de Dois Objetos” (F24): determina os pontos de intersecção de dois objetos.

3.2.8 Ferramenta “Ponto Médio ou Centro” (F25): determina o ponto médio de um segmento de reta ou o centro de uma circunferência ou elipse.

3.2.9 Ferramenta “Número Complexo” (F26): permite criar o afixo de novo número complexo. Esse número complexo é expresso na forma algébrica na janela “Álgebra”.

3.2.10 Ferramenta “Otimização” (F27): determina máximos e mínimos locais de uma função.

3.2.11 Ferramenta “Raízes” (F28): determina as raízes de uma função.

Na janela 3, da esquerda para direita, estão disponíveis as ferramentas: “Reta”, “Segmento”, “Segmento com Comprimento Fixo”, “Semirreta”, “Caminho Poligonal”, “Vetor” e “Vetor a Partir de um Ponto”.

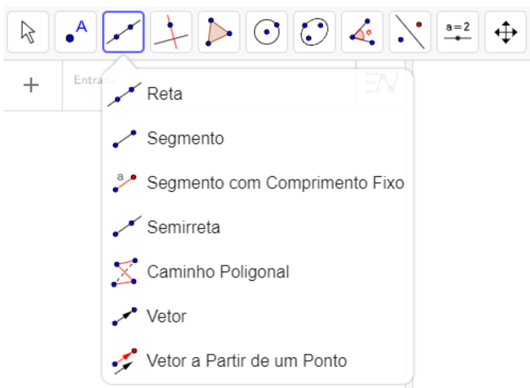

Figura 6 – Janela 3: Retas
Elaborado pelo autor

3.2.12 Ferramenta “Reta” (F31): permite criar uma reta a partir de dois pontos distintos.

3.2.13 Ferramenta “Segmento” (F32): permite criar um segmento de reta a partir de dois pontos distintos.

3.2.14 Ferramenta “Segmento com Comprimento Fixo” (F33): permite criar um segmento de reta a partir de um ponto e de um comprimento definido pelo usuário.

3.2.15 Ferramenta “Semirreta” (F34): permite criar uma semirreta a partir de dois pontos distintos.

3.2.16 Ferramenta “Caminho Poligonal” (F35): permite criar uma poligonal a partir de pelo menos três pontos distintos.

3.2.17 Ferramenta “Vetor” (F36): permite definir um vetor a partir de dois pontos distintos.

3.2.18 Ferramenta “Vetor a Partir de um Ponto” (F37): permite criar um ponto $B = A + \vec{v}$ a partir de um ponto A e de um vetor $\vec{v}$.

Na janela 4, da esquerda para direita, estão disponíveis as ferramentas: “Reta Perpendicular”, “Reta Paralela”, “Mediatriz”, “Bissetriz”, “Reta Tangente”, “Reta Polar ou Diametral”, “Reta de Regressão Linear” e “Lugar Geométrico”.

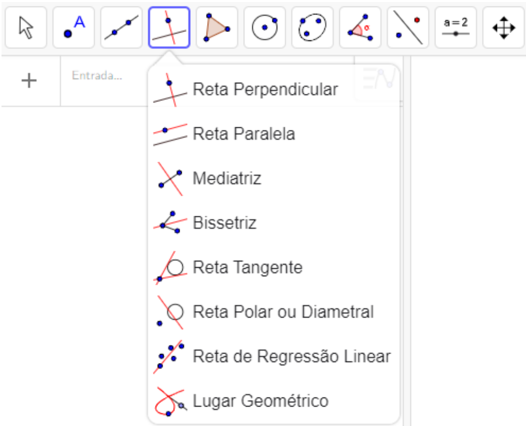

Figura 7 – Janela 4: Retas Especiais
Elaborado pelo autor

3.2.19 Ferramenta “Reta Perpendicular” (F41): determina, a partir de uma reta r (ou semirreta ou segmento de reta) e de um ponto P, a reta perpendicular à r que passa por P.

3.2.20 Ferramenta “Reta Paralela” (F42): determina, a partir de uma reta r (ou semirreta ou segmento de reta) e de um ponto P, a reta paralela à r que passa por P.

3.2.21 Ferramenta “Mediatriz” (F43): determina a mediatriz de um segmento de reta a partir, ou de dois pontos distintos, ou a partir do próprio segmento de reta.

3.2.22 Ferramenta “Bissetriz” (F44): determina ou a bissetriz de um ângulo ou as bissetrizes dos ângulos formados por duas retas.

3.2.23 Ferramenta “Reta Tangente” (F45): determina a(s) reta(s) tangente(s) a uma cônica ou ao gráfico de uma função. É possível selecionar: um ponto P e uma cônica γ para determinar as tangentes a γ que passam por P; uma reta r e uma cônica γ para determinar as tangentes a γ que são paralelas a r; um ponto P e uma função f para determinar as tangentes ao gráfico de f no ponto $T \in \mathrm{gr}(f)$ de mesma abscissa que P; duas circunferências α e β para determinar as tangentes comuns a α e β.

3.2.24 Ferramenta “Reta Polar ou Diametral” (F46): determina a reta polar (ou reta diametral) de uma cônica a partir de um ponto e de uma cônica. Considerando um ponto P, uma cônica γ e os pontos de tangência T_1 e T_2 das retas t_1 e t_2 tangentes a γ que passam por P, a reta definida por T_1 e por T_2 é dita reta polar a γ relativa a P.

3.2.25 Ferramenta “Reta de Regressão Linear” (F47): determina a reta de regressão linear para um conjunto de pontos selecionados pelo usuário.

3.2.26 Ferramenta “Lugar Geométrico” (F48): permite criar o lugar geométrico dos pontos P que dependem de um ponto A.

Na janela 5, da esquerda para direita, estão disponíveis as ferramentas: “Polígono”, “Polígono Regular”, “Polígono Rígido” e “Polígono Semideformável”.

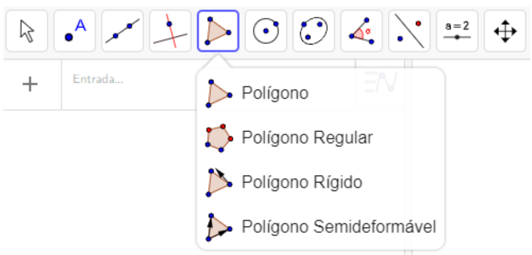

Figura 8 - Janela 5: Polígonos
Elaborado pelo autor

3.2.27 Ferramenta “Polígono” (F51): permite criar um polígono a partir de seus vértices.

3.2.28 Ferramenta “Polígono Regular” (F52): determina o polígono regular de n vértices a partir de dois pontos, que serão vértices consecutivos do polígono. O número n de vértices é definido pelo usuário.

3.2.29 Ferramenta “Polígono Rígido” (F53): permite criar um polígono a partir de outro já definido que manterá seu formato, mas que pode ser transladado ou rotacionado a partir de dois de seus vértices.

3.2.30 Ferramenta “Polígono Semideformável” (F54): permite criar um polígono a partir de outro já definido que manterá seu formato quando o primeiro vértice for arrastado, mas os outros vértices podem ser movidos livremente.

Na janela 6, da esquerda para direita, estão disponíveis as ferramentas: “Círculo dados Centro e um de seus Pontos”, “Círculo: Centro & Raio”, “Compasso”, “Círculo definido por Três Pontos”, “Semicírculo”, “Arco Circular”, “Arco Circuncircular”, “Setor Circular” e “Setor Circuncircular”.

Figura 9 – Janela 6: Círculos e Arcos
Elaborado pelo autor

3.2.31 Ferramenta “Círculo dados Centro e um de seus Pontos” (F61): determina a circunferência a partir de seu centro e de um de seus pontos.

3.2.32 Ferramenta “Círculo: Centro & Raio” (F62): determina a circunferência a partir de seu centro e de seu raio, que deve ser definido pelo usuário.

3.2.33 Ferramenta “Compasso” (F63): determina a circunferência tomando, inicialmente, a distância entre dois pontos para definir seu raio. Em seguida, o usuário define o ponto que será o centro dessa circunferência.

3.2.34 Ferramenta “Círculo definido por Três Pontos” (F64): determina a circunferência a partir de três de seus pontos.

3.2.35 Ferramenta “Semicírculo” (F65): determina a semicircunferência a partir de dois pontos que definem o diâmetro dessa semicircunferência.

3.2.36 Ferramenta “Arco Circular” (F66): determina o arco de circunferência a partir de seu centro e dos pontos que são as extremidades desse arco.

3.2.37 Ferramenta “Arco Circuncircular” (F67): determina o arco de circunferência a partir das extremidades do arco e de um terceiro ponto qualquer desse arco, mas distinto das extremidades.

3.2.38 Ferramenta “Setor Circular” (F68): determina o setor circular a partir de seu centro e das extremidades do arco de circunferência associado.

3.2.39 Ferramenta “Setor Circuncircular” (F69): determina o setor circular a partir das extremidades do arco de circunferência e de um terceiro ponto qualquer desse arco, mas distinto das extremidades.

Na janela 7, da esquerda para direita, estão disponíveis as ferramentas: “Elipse”, “Hipérbole”, “Parábola” e “Cônica por Cinco Pontos”.

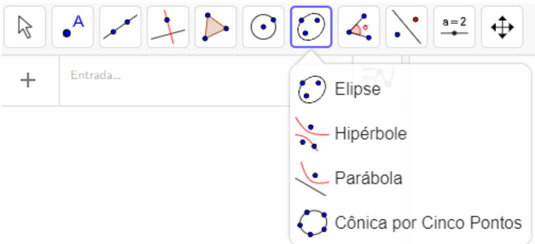

Figura 10 – Janela 7: Cônicas
Elaborado pelo autor

3.2.40 Ferramenta “Elipse” (F71): determina a elipse a partir de seus focos e de um ponto qualquer dessa elipse.

3.2.41 Ferramenta “Hipérbole” (F72): determina a hipérbole a partir de seus focos e de um ponto qualquer dessa hipérbole.

3.2.42 Ferramenta “Parábola” (F73): determina a parábola a partir de seu foco e de sua reta diretriz.

3.2.43 Ferramenta “Cônica por Cinco Pontos” (F74): determina uma cônica a partir de cinco pontos dessa cônica.

Na janela 8, da esquerda para direita, estão disponíveis as ferramentas: “Ângulo”, “Ângulo com Amplitude Fixa”, “Distância, Comprimento ou Perímetro”, “Área”, “Inclinação”, “Lista”, “Relação” e “Inspetor de Funções”.

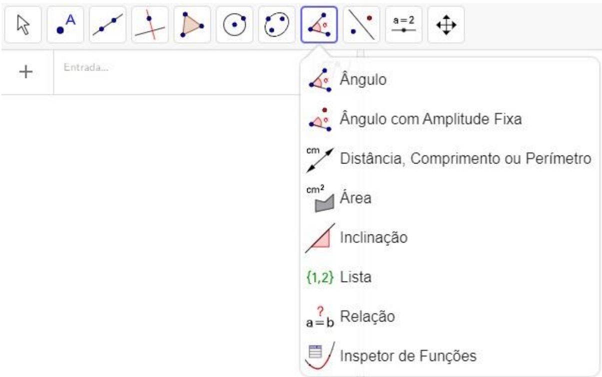

Figura 11 – Janela 8: Medições
Elaborado pelo autor

3.2.44 Ferramenta “Ângulo” (F81): determina o ângulo entre: dois segmentos de reta, entre duas semirretas, entre duas retas, entre dois vetores. Também determina todos os ângulos internos de um polígono.

3.2.45 Ferramenta “Ângulo com Amplitude Fixa” (F82): determina o ângulo $A\hat{V}B$ a partir do ponto A, do vértice V e de uma medida definida pelo usuário, determinando, também, o ponto B.

3.2.46 Ferramenta “Distância, Comprimento ou Perímetro” (F83): determina a distância entre: dois pontos, duas retas, um ponto e uma reta. Também determina a medida de um segmento de reta, o comprimento de uma circunferência e o perímetro de um polígono.

3.2.47 Ferramenta “Área” (F84): determina a área de: um polígono, um círculo, uma elipse.

3.2.48 Ferramenta “Inclinação” (F85): determina a tangente do ângulo de inclinação de uma reta a partir dessa reta.

3.2.49 Ferramenta “Lista” (F86): permite criar uma lista de objetos a partir da seleção desses objetos.

3.2.50 Ferramenta “Relação” (F87): determina a relação entre dois objetos.

3.2.51 Ferramenta “Inspetor de Funções” (F88): determina numa função, a partir de um intervalo definido pelo usuário: mínimo local, máximo local, raiz, valor numérico da integral, área, média e comprimento. Também determina, a partir de um ponto selecionado pelo usuário: o valor da derivada, o valor da segunda derivada, a curvatura, a reta tangente e o círculo de curvatura.

Na janela 9, da esquerda para direita, estão disponíveis as ferramentas: “Reflexão em Relação a uma Reta”, “Reflexão em Relação a um Ponto”, “Inversão”, “Rotação em Torno de um Ponto”, “Translação por um Vetor” e “Homotetia”.

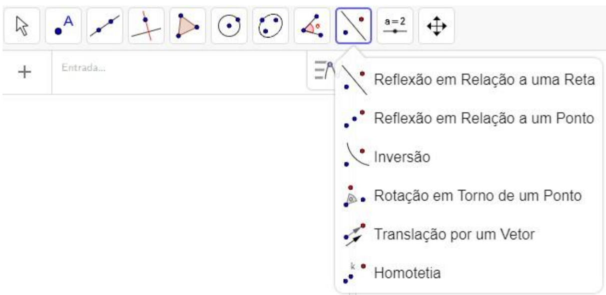

Figura 12 – Janela 9: Transformações
Elaborado pelo autor

3.2.52 Ferramenta “Reflexão em Relação a uma Reta” (F91): determina a reflexão do objeto em relação a uma reta.

3.2.53 Ferramenta “Reflexão em Relação a um Ponto” (F92): determina a reflexão do objeto em relação a um ponto.

3.2.54 Ferramenta “Inversão” (F93): determina a reflexão do objeto em relação a uma circunferência[1].

3.2.55 Ferramenta “Rotação em Torno de um Ponto” (F94): determina o objeto rotacionado de um ângulo θ em torno de um ponto P. O usuário define a medida do ângulo θ.

3.2.56 Ferramenta “Translação por um Vetor” (F95): determina o objeto transladado conforme um vetor.

3.2.57 Ferramenta “Homotetia” (F96): determina o objeto resultante da homotetia de razão k e centro O.

[1] Ver Apêndice B

Na janela 10, da esquerda para direita, estão disponíveis as ferramentas: “Controle Deslizante”, “Texto”, “Inserir Imagem”, “Botão”, “Caixa para Exibir / Esconder Objetos” e “Campo de Entrada”.

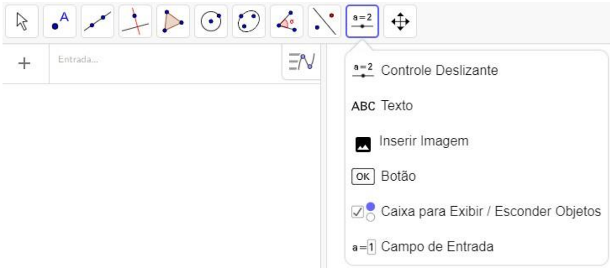

Figura 13 – Janela 10: Objetos Especiais
Elaborado pelo autor

3.2.58 Ferramenta “Controle Deslizante” (F101): permite criar um controle deslizante para um número ou um ângulo.

3.2.59 Ferramenta “Texto” (F102): permite criar um texto.

3.2.60 Ferramenta “Inserir Imagem” (F103): permite inserir uma imagem.

3.2.61 Ferramenta “Botão” (F104): permite criar um botão que será relacionado a alguma ação.

3.2.62 Ferramenta “Caixa para Exibir / Esconder Objetos” (F105): permite criar um botão que exibe ou esconde objetos.

3.2.63 Ferramenta “Campo de Entrada” (F106): permite criar um campo de entrada que será vinculado ao valor de algum objeto.

Na janela 11, da esquerda para direita, estão disponíveis as ferramentas: “Mover Janela de Visualização”, “Ampliar”, “Reduzir”, “Exibir / Esconder Objeto”, “Exibir / Esconder Rótulo”, “Copiar Estilo Visual” e “Apagar”.

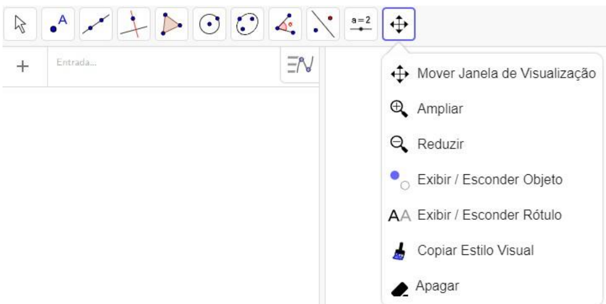

Figura 14 – Janela 11: Outras Ferramentas
Elaborado pelo autor

3.2.64 Ferramenta “Mover Janela de Visualização” (F111): permite mover a janela de visualização para alterar a área visível ou a escala de visualização.

3.2.65 Ferramenta “Ampliar” (F112): permite alterar a escala da janela de visualização de modo que os objetos ocupem uma área maior.

3.2.66 Ferramenta “Reduzir” (F113): permite alterar a escala da janela de visualização de modo que os objetos ocupem uma área menor.

3.2.67 Ferramenta “Exibir / Esconder Objeto” (F114): permite exibir ou esconder um objeto.

3.2.68 Ferramenta “Exibir / Esconder Rótulo” (F115): permite exibir ou esconder o rótulo de um objeto.

3.2.69 Ferramenta “Copiar Estilo Visual” (F116): permite copiar as propriedades visuais de um objeto para outros.

3.2.70 Ferramenta “Apagar” (F117): permite apagar um objeto.

4. RESOLVENDO PROBLEMAS DE GEOMETRIA

A seguir, são apresentados alguns problemas de geometria que foram escolhidos por serem problemas interessantes e com um nível de complexidade relativamente elevado se for considerada uma resolução sem auxílio de qualquer recurso didático que não seja o raciocínio lógico-dedutivo. Um dos propósitos é contrastar tal resolução com outra elaborada por meio do GeoGebra com relação à quantidade de conceitos necessários e à quantidade de passagens para se resolver cada problema.

4.1 Problema 1 – 15ª OBMEP[2] (Nível 3, 1ª Fase, Questão 13)

> "O quadrado ABCD tem 8 cm de lado. O ponto P, no interior do quadrado, é tal que a área do triângulo APD é o dobro da área do triângulo ABP. Seja x a distância, em centímetros, do ponto P ao lado AB. Qual é o gráfico da área da região destacada em cinza em função de x?"

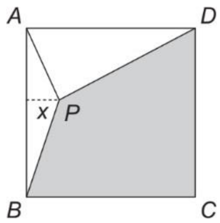

Figura 15 – Problema 1: Enunciado
Fonte: Caderno de Questões 15ª OBMEP

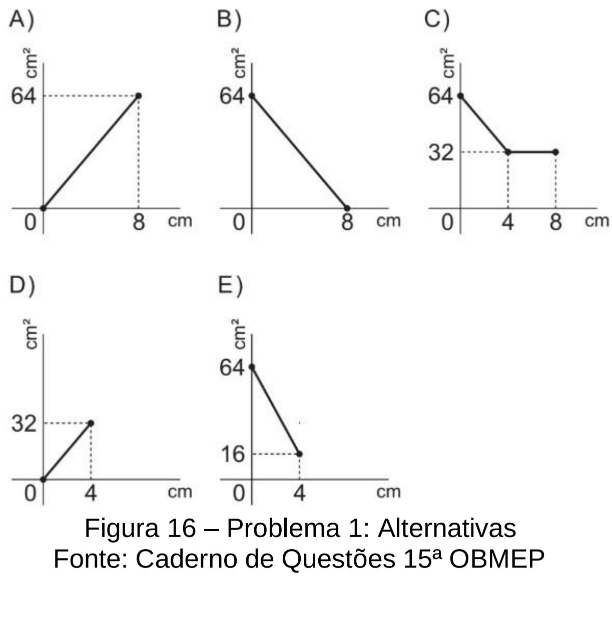

Figura 16 – Problema 1: Alternativas
Fonte: Caderno de Questões 15ª OBMEP

[2] Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas

Resolução: Observe que a área do triângulo[3] ABP é $\frac{8\cdot x}{2}=4x$. Então, a área do triângulo ADP é $2\cdot 4x=8x$ e, assim, como a área do quadrado[4] $ABCD$ é $8^2=64$, a área do quadrilátero $BCDP$ é $64-4x-8x=64-12x$. Como a área do triângulo ADP é, também, $8x=\frac{8\cdot(8-y_P)}{2}\Leftrightarrow y_P=8-2x$ em função da ordenada y_P do ponto P, considerando um sistema de eixos cartesianos ortogonais com origem A de tal forma que os eixos contenham os lados $\overline{BC}$ e $\overline{AB}$ do quadrado, temos $8-2x\geq 0\Leftrightarrow x\leq 4$. Dessa forma, o gráfico de $y=64-12x$, para $0\leq x\leq 4$ e, consequentemente, $16\leq y\leq 64$, é um segmento de reta de extremidades $(0;64)$ e $(4;16)$.

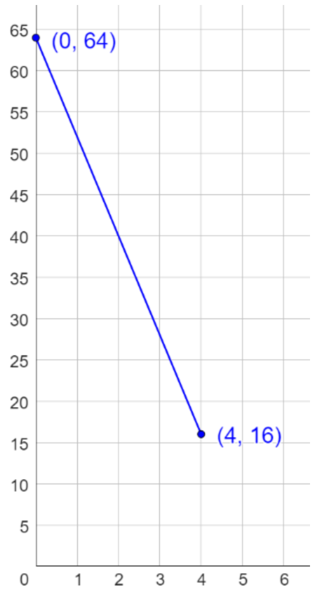

Figura 17 – Problema 1: Solução
Elaborado pelo autor

Resolução por meio do GeoGebra:

Passo 1: quadrado $ABCD$

Definir, por meio de (F21), o ponto B tal que $B=(0;0)$ e o ponto C tal que $C=(8;0)$. Determinar, por meio de (F52), o quadrado $ABCD$.

---

[3] A área do triângulo de base b e altura h é $\frac{b\cdot h}{2}$

[4] A área do quadrado de lado ℓ é ℓ^2

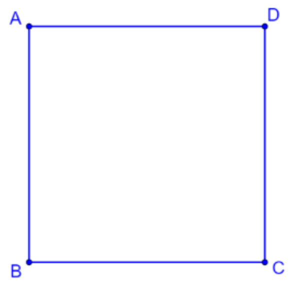

Figura 18 – Problema 1: Passo 1
Elaborado pelo autor

Passo 2: controle deslizante, ponto P e ponto P'

Determinar, por meio de (F101), o controle deslizante "a", que corresponde ao valor de x do enunciado, tal que $0 \le a \le 4$ e tenha incremento[5] 0,1. Definir, na janela de álgebra, o ponto $P = (a; 8-2a)$. Determinar, por meio de (F51), o quadrilátero $BCDP$. Definir, na janela de álgebra, o ponto $P' = (a; \text{Área}(BCDP))$ [6] e habilitar o rastro desse ponto.

Observe que a área do triângulo ABP é $\frac{8 \cdot a}{2} = 4a$. Sendo y a ordenada de P a altura do triângulo ADP relativa ao vértice P é $8-y$. Pela área do triângulo ADP temos $\frac{8 \cdot (8-y)}{2} = 2 \cdot 4a \Leftrightarrow y = 8-2a$. Como $0 \le y \le 8$, então $0 \le 8-2a \le 8 \Leftrightarrow 0 \le a \le 4$.

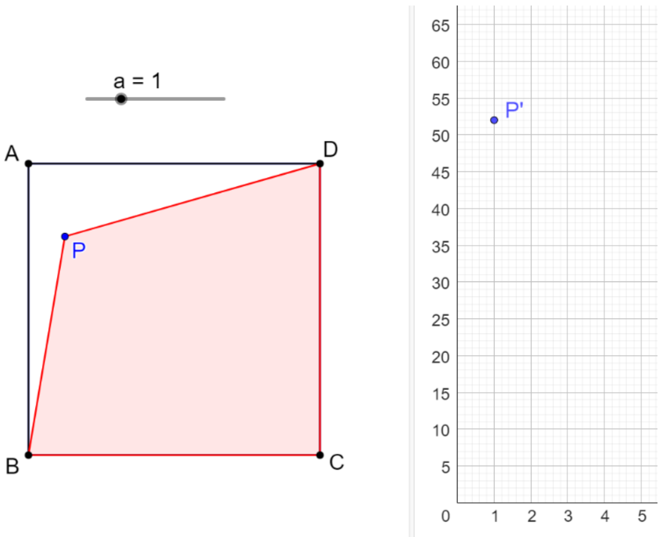

Figura 19 – Problema 1: Passo 2
Elaborado pelo autor

[5] O valor do incremento corresponde à variação mínima do controle deslizante.
[6] A função $\text{Área}(BCDP)$ corresponde a (F84).

Passo 3: solução

Variar o controle deslizante e visualizar o rastro exibido pelo ponto P', que formará o gráfico da área do quadrilátero $BCDP$.

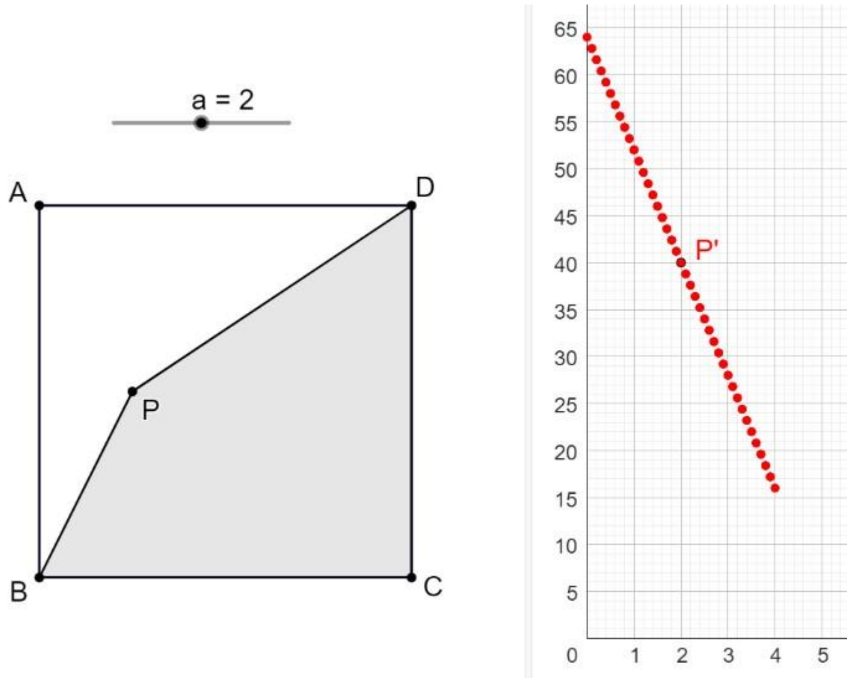

Figura 20 – Problema 1: Solução
Elaborado pelo autor

Considerações: na resolução que não faz uso do GeoGebra, é necessário conhecer os conceitos de área de triângulo, área de quadrado, gráfico de função afim e inequações; enquanto que na resolução por meio do GeoGebra é possível construir os quadriláteros e verificar visualmente o gráfico da área sendo formado conforme mudamos a posição do ponto P, tornando o entendimento mais dinâmico e interativo.

4.2 Problema 2 – Lidsky et al., 1973 (*Problems in Elementary Mathematics*, problem 348, p. 53)

> *"In an isosceles triangle ABC the vertex angle B is equal to 20° and points Q and P are taken respectively on the sides AB and BC so that ∠ACQ = 60° and ∠CAP = 50°. Prove that ∠APQ = 80°"*

Uma adaptação para o enunciado deste problema é "Num triângulo isósceles ABC, o ângulo do vértice[7] B do triângulo mede 20° e os pontos Q e P são pontos dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, respectivamente, de tal forma que $\angle ACQ = 60°$ e $\angle CAP = 50°$. Determine a medida de $\angle APQ$."

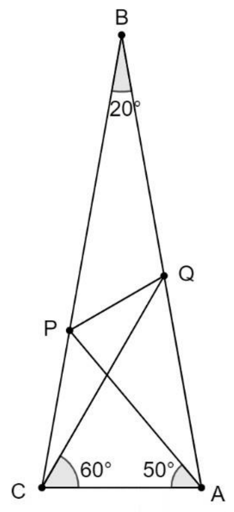

Figura 21 – Problema 2: Esboço 1
Elaborado pelo autor

<u>Resolução</u>: observe que, como o triângulo ABC é isósceles de vértice B, $\mathrm{m}\left(B\hat{C}A\right) = \mathrm{m}\left(B\hat{A}C\right) = 80°$[8], pela soma das medidas dos ângulos internos[9] desse triângulo. Dessa forma, também pela soma das medidas dos ângulos internos dos triângulos ACQ e ACP, temos, respectivamente, $\mathrm{m}\left(C\hat{Q}A\right) = 40°$ e $\mathrm{m}\left(C\hat{P}A\right) = 50°$.

Além disso, $\mathrm{m}\left(P\hat{C}Q\right) = \mathrm{m}\left(A\hat{C}P\right) - \mathrm{m}\left(A\hat{C}Q\right) \Leftrightarrow \mathrm{m}\left(P\hat{C}Q\right) = 80° - 60° = 20°$.

---

[7] Ângulo do Vértice no triângulo isósceles é o ângulo formado pelos lados congruentes do triângulo isósceles, sendo oposto à base.

[8] $\mathrm{m}\left(A\hat{B}C\right)$ corresponde à medida do ângulo $A\hat{B}C$.

[9] A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°.

Observe, também, que, como $\mathrm{m}\left(C\hat{P}A\right)=\mathrm{m}\left(C\hat{A}P\right)=50°$, o triângulo ACP é isósceles tal que $CA=CP$.

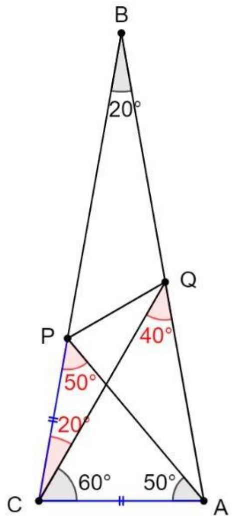

Figura 22 – Problema 2: Esboço 2
Elaborado pelo autor

Sendo K o ponto do segmento de reta $\overline{AQ}$ tal que $\mathrm{m}\left(A\hat{C}K\right)=20°$, temos:

i. $\mathrm{m}\left(C\hat{K}A\right)=\mathrm{m}\left(C\hat{A}K\right)=80°$ e, dessa forma, o triângulo ACK é isósceles tal que $CK=CA$;

ii. $\mathrm{m}\left(K\hat{C}Q\right)=\mathrm{m}\left(A\hat{C}Q\right)-\mathrm{m}\left(A\hat{C}K\right)=60°-20°=40°$. Como $\mathrm{m}\left(K\hat{C}Q\right)=\mathrm{m}\left(K\hat{Q}C\right)=40°$, o triângulo KCQ é isósceles tal que $KQ=CK$;

iii. $\mathrm{m}\left(K\hat{C}P\right)=\mathrm{m}\left(K\hat{C}Q\right)+\mathrm{m}\left(P\hat{C}Q\right)=40°+20°=60°$. Como $CP=CA=CK$, o triângulo CPK é equilátero[10] e, assim, $CP=CK=KP$ e $\mathrm{m}\left(C\hat{K}P\right)=60°$;

iv. $\mathrm{m}\left(P\hat{K}Q\right)=180°-\mathrm{m}\left(C\hat{K}A\right)-\mathrm{m}\left(CKP\right)=180°-80°-60°=40°$. Como $KP=KQ$, o triângulo KPQ é isósceles e, então, $\mathrm{m}\left(K\hat{P}Q\right)=\mathrm{m}\left(K\hat{Q}P\right)=70°$, pela soma das medidas dos ângulos internos;

v. $\mathrm{m}\left(P\hat{Q}C\right)=\mathrm{m}\left(K\hat{Q}P\right)-\mathrm{m}\left(C\hat{Q}A\right)=70°-40°=30°$.

[10] O triângulo equilátero possui todos os lados congruentes entre si e, também, todos os ângulos

internos de medida igual a 60°.

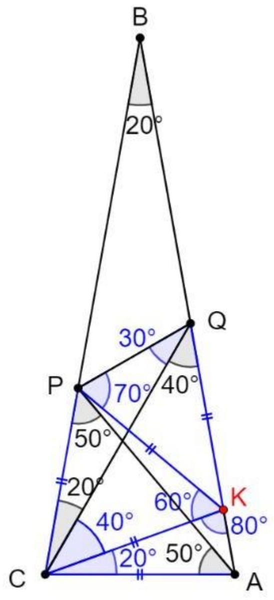

Figura 23 – Problema 2: Esboço 3
Elaborado pelo autor

Portanto, da soma dos ângulos internos do triângulo CPQ,

$$\mathrm{m}\left(A\hat{P}Q\right) = 180° - 20° - 30° - 50° = 80°$$

Resolução por meio do GeoGebra:

Passo 1: lado $\overline{AC}$ do triângulo ABC.

Definir os pontos A e C, por meio de (F21) e determinar o segmento de reta $\overline{AC}$ por meio de (F32).

Figura 24 – Problema 2: Passo 1
Elaborado pelo autor

Passo 2: vértice B do triângulo ABC.

Determinar, por meio de (F43), a mediatriz m de $\overline{AC}$.

Determinar o arco capaz c de 20° sobre $\overline{AC}$: por meio de (F82), determinar o ponto A' resultante da rotação de A em 20° no sentido horário em torno de C; por meio de (F41) determinar a reta p tal que $p \perp \overline{CA'}$[11] e $C \in p$; por meio de (F24),

[11] $\perp$: perpendicular a

determinar o ponto O tal que $O \in m \cap p$; por meio de (F66), determinar o arco c de centro O tal que $\{A, C\} \subset c$.

Determinar, por meio de (F24), o ponto B tal que $B \in m \cap c$ e determinar os segmentos de reta $\overline{BC}$ e $\overline{AB}$ por meio de (F32).

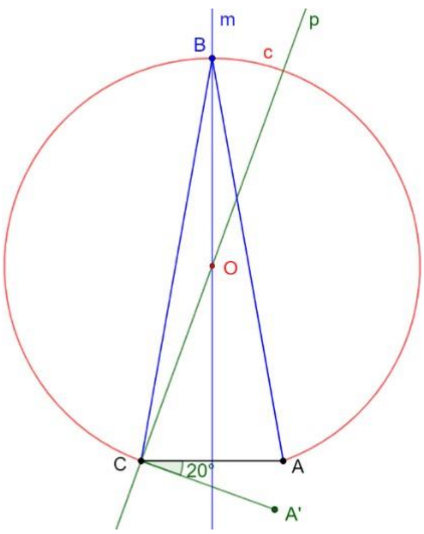

Figura 25 – Problema 2: Passo 2
Elaborado pelo autor

<u>Passo 3</u>: Ponto Q e segmento de reta $\overline{CQ}$

Determinar, por meio de (F82), o ponto D resultante da rotação de A em 60° no sentido anti-horário em torno de C. Determinar, por meio de (F37), a semirreta $\overrightarrow{CD}$ e determinar, por meio de (F24), o ponto Q tal que $Q \in \overline{AB} \cap \overrightarrow{CD}$. Determinar, por meio de (F32), o segmento de reta $\overline{CQ}$.

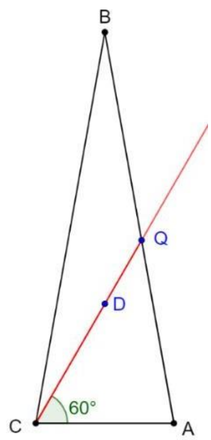

Figura 26 – Problema 2: Passo 3
Elaborado pelo autor

<u>Passo 4</u>: ponto P e segmento de reta $\overline{AP}$

Determinar, por meio de (F82), o ponto E resultante da rotação de C de 50° no sentido horário em torno de A. Determinar, por meio de (F37), a semirreta $\overrightarrow{AE}$. Determinar, por meio de (F24), o ponto P tal que $P \in \overline{BC} \cap \overrightarrow{AP}$. Determinar, por meio de (F32), o segmento de reta $\overline{AP}$.

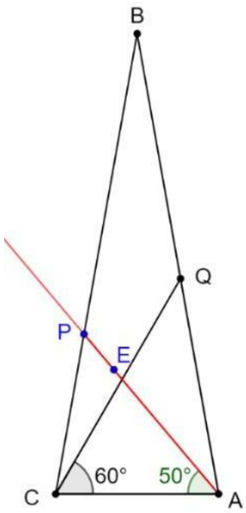

Figura 27 – Problema 2: Passo 4
Elaborado pelo autor

<u>Passo 5</u>: segmento de reta $\overline{PQ}$

Determinar, por meio de (F32), o segmento de reta $\overline{PQ}$.

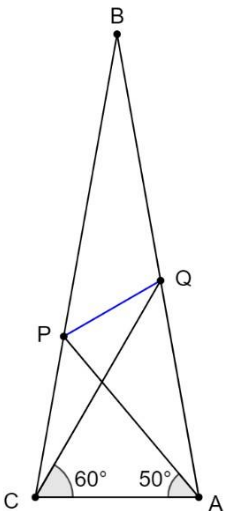

Figura 28 – Problema 2: Passo 5
Elaborado pelo autor

Passo 6: solução

Determinar, por meio de (F81), a medida do ângulo $A\hat{P}Q$.

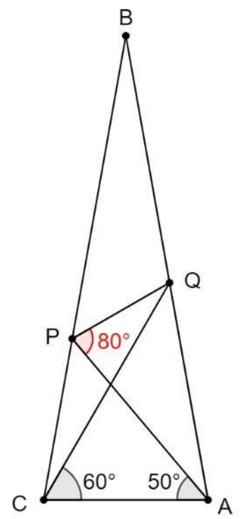

Figura 29 – Problema 2: Solução
Elaborado pelo autor

Considerações: embora a resolução que não faz uso do GeoGebra demande poucos conceitos geométricos, como as propriedades do triângulo isósceles, do triângulo equilátero e a soma das medidas dos ângulos internos do triângulo, sua implementação requer um profundo domínio desses conceitos. Além disso, a resolução envolve a aplicação de construções auxiliares, uma estratégia empregada por estudantes de geometria mais experientes. Isso demonstra a necessidade de uma sólida compreensão teórica aliada à habilidade prática na manipulação desses elementos geométricos para chegar à solução do problema. Enquanto que, reproduzindo o cenário do problema por meio do GeoGebra, a resposta é instantaneamente encontrada pela ferramenta que determina a medida do ângulo. Apesar deste fato poder limitar o desenvolvimento do raciocínio geométrico do estudante, uma vantagem significativa é a capacidade de verificar as conclusões geométricas de forma direta e simplificada em problemas similares.

4.3 Problema 3 – 17ª OBMEP[12] (Nível 3, 1ª Fase, Questão 13)

> "A figura mostra três circunferências de centros O, P e Q, cada uma tangente às outras nos pontos A, B e C, como indicado. O diâmetro AD da circunferência de centro O tangencia a circunferência de centro Q em E. Os raios das circunferências de centro O e de centro P medem, respectivamente, 1 e 2/3. Qual é o raio da circunferência de centro Q?"

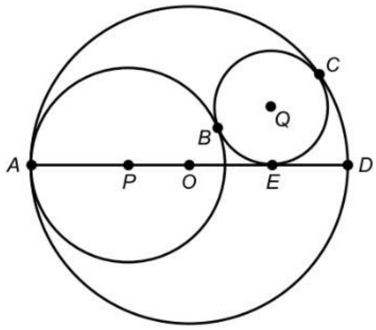

Figura 30 – Problema 3: Enunciado
Fonte: Caderno de Questões da 17ª OBMEP

(A) $1/5$ (B) $6/25$ (C) $7/25$ (D) $8/25$ (E) $9/25$

Resolução: observe que, como C é ponto de tangência entre ascircunferências de centros O e Q, os pontos O, Q e C são colineares. Sendo$x = QC = QB = QE$ a medida do raio da circunferência de centro Q, temos $OQ + QC = OC$ e, assim, $OQ = 1 - x$. Como E é ponto de tangência entre o diâmetro $\overline{AD}$ e a circunferência de centro Q, o triângulo OEQ é retângulo em E e, dessa forma, $OQ^2 = OE^2 + QE^2$ [13]. Logo, $(1-x)^2 = OE^2 + x^2 \Leftrightarrow OE^2 = 1 - 2x$ e, assim, $OE = \sqrt{1-2x}$.

Observe, também, que, como B é ponto de tangência entre as circunferências de centros P e Q, os pontos P, B e Q são colineares. Logo, $PB + BQ = PQ$ e, então, $PQ = 2/3 + x$. Além disso, como A é ponto de tangência entre as circunferências de centros O e P, temos $OP + PA = OA$ e, assim, $OP = 1/3$. Então, $PE = OP + OE = 1/3 + \sqrt{1-2x}$ e, sendo o triângulo PEQ é retângulo em E, $PQ^2 = PE^2 + QE^2$. Logo, para $x \in \mathbb{R}_+^*$ tal que $x \le 1/2$, temos

$$(2/3 + x)^2 = \left(1/3 + \sqrt{1-2x}\right)^2 + x^2 \Leftrightarrow 5x - 1 = \sqrt{1-2x} \Leftrightarrow x(25x - 8) = 0 \Leftrightarrow x = 8/25 .$$

---

[12] OBMEP: Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas

[13] No triângulo retângulo de catetos a e b e hipotenusa c, vale o Teorema de Pitágoras: $a^2 + b^2 = c^2$

<u>Resolução por meio do GeoGebra</u>:

<u>Passo 1</u>: circunferência de centro O e diâmetro $\overline{AD}$

Definir o ponto O por meio de (F21) e determinar a circunferência α de centro O e raio 1 por meio de (F62). Definir o ponto A sobre a circunferência por meio de (F21) e determinar a reta $\overleftrightarrow{AO}$ por meio de (F31). Definir o ponto D, intersecção entre a circunferência e a reta, por meio de (F24).

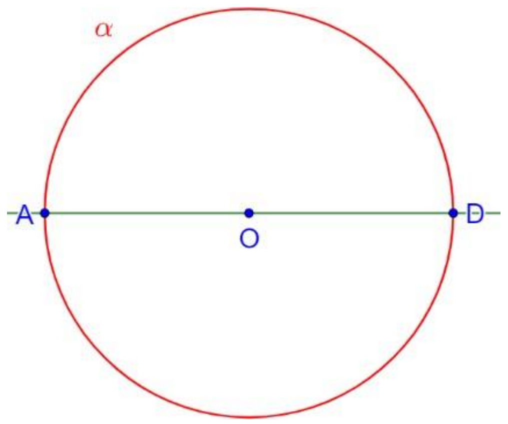

Figura 31 – Problema 3: Passo 1
Elaborado pelo autor

<u>Passo 2</u>: ponto P e circunferência de centro P

Definir o ponto $P \in \overline{AO}$ por meio de (F33) tal que $AP = 2/3$. Determinar, por meio de (F61), a circunferência de centro P que passa por A.

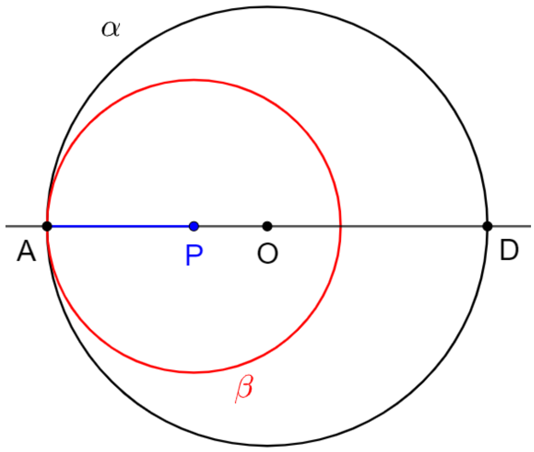

Figura 32 – Problema 3: Passo 2
Elaborado pelo autor

<u>Passo 3</u>: os inversos B' e C' dos pontos de tangência B e C, respectivamente

Determinar, por meio de (F24), o ponto D' tal que $D' \in \beta \cap \overline{AD}$. Determinar, por meio de (F41), as retas r e s tais que $r \perp \overline{AD}$, $D' \in r$ e $s \perp \overline{AD}$, $D \in s$. Sendo A o polo de inversão[14], D' é o inverso de D e vice-versa, r é o inverso de α e vice-versa e s é o inverso de β e vice-versa. Procurar a circunferência γ que tangencia $\overline{AD}$, α e β é, neste contexto, procurar a circunferência γ', inversa de γ, que tangencia $\overline{AD}$ (que é seu próprio inverso), r e s. Observe que, como $r \perp \overline{AD} \perp s$, γ' está inscrita no quadrado de lado DD', tangenciando os pontos médios dos lados desse quadrado.

Determinar, por meio de (F25), o ponto médio M de $\overline{DD'}$. Determinar, por meio de (F61), as circunferências δ_1 e δ_2 de centros D' e D, respectivamente, tais que $M \in \delta_1$ e $M \in \delta_2$. Determinar, por meio de (F24) os pontos B' e C' tais que $B' \in \delta_1 \cap r$ e $C' \in \delta_2 \cap s$. Sendo A o polo de inversão, B' é o inverso de B e vice-versa e C' é o inverso de C e vice-versa.

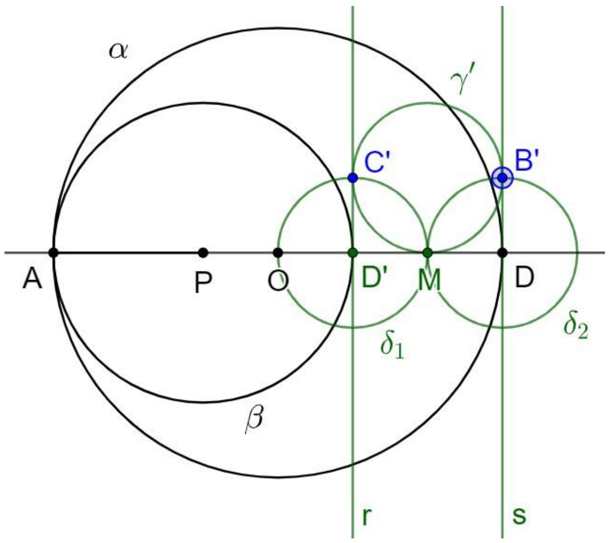

Figura 33 – Problema 3: Passo 3
Elaborado pelo autor

[14] Ver Apêndice B

Passo 4: pontos de tangência B e C

Determinar, por meio de (F31) as retas $\overleftrightarrow{AB'}$ e $\overleftrightarrow{AC'}$. Determinar, por meio de (F24), os pontos B e C, tais que $B \in \overleftrightarrow{AB'} \cap \beta$, $C \in \overleftrightarrow{AC'} \cap \alpha$ e $A \neq B \neq C$.

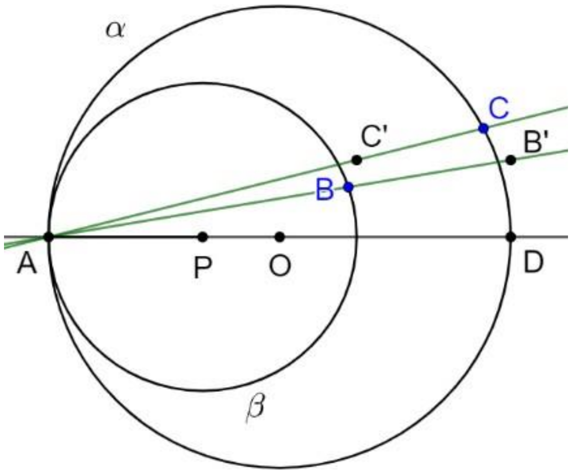

Figura 34 – Problema 3: Passo 4
Elaborado pelo autor

Passo 5: a circunferência γ de centro Q

Determinar, por meio de (F34), as semirretas $\overrightarrow{OC}$ e $\overrightarrow{PB}$. Determinar, por meio de (F24), o ponto Q tal que $Q \in \overrightarrow{OC} \cap \overrightarrow{PB}$. Determinar, por meio de (F61) a circunferência γ de centro Q tal que $B \in \gamma$. Determinar, por meio de (F24), o ponto E tal que $E \in \gamma \cap \overline{AD}$.

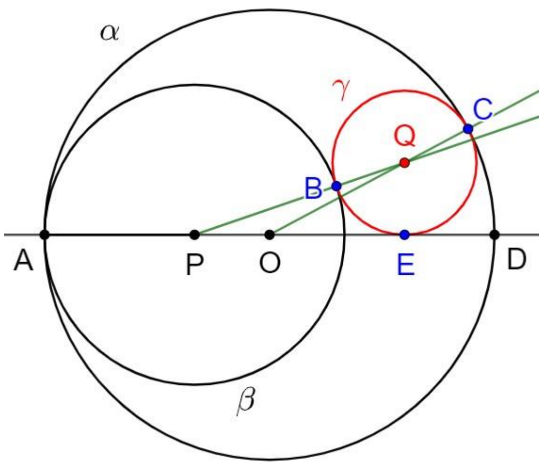

Figura 35 – Problema 3: Passo 5
Elaborado pelo autor

<u>Passo 6</u>: solução

Determinar, por meio de (F83), a medida do raio de γ $QB = QE = QC = 8/25 = 0{,}32$.

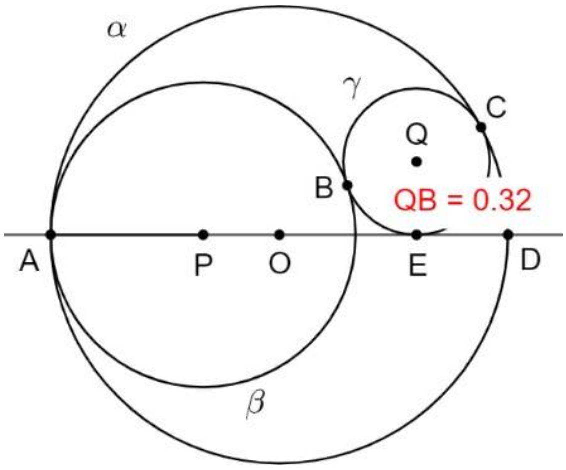

Figura 36 – Problema 3: Solução
Elaborado pelo autor

<u>Considerações</u>: a resolução que não faz uso do GeoGebra envolve conceitos como tangência entre circunferências, teorema de Pitágoras, produtos notáveis, equações irracionais e equações quadráticas. Isso requer uma percepção aguçada do estudante para identificar os triângulos retângulos mais convenientes para se chegar às equações necessárias para resolver o problema. Por outro lado, por meio do GeoGebra, embora seja possível obter, com pouco esforço, uma estimativa da solução fazendo a construção de uma aproximação da circunferência de centro Q, a solução exata demanda conhecimento da inversão geométrica, especialmente aplicada a problemas de tangência, exigindo criatividade e domínio de suas propriedades para se chegar à solução.

4.4 Problema 4 – 42ª OBM[15] (Nível 2, Fase Única, Questão 1)

> "Seja ABC um triângulo acutângulo e D um ponto sobre BC tal que AD é perpendicular a BC. A bissetriz do ângulo ∠DAC intersecta o segmento CD em E. Seja F o ponto sobre a reta AE tal que BF é perpendicular a AE. Se ∠BAE = 45°, calcule a medida do ângulo ∠BFC."

A figura a seguir busca representar a situação descrita no enunciado, acrescentando o ponto P tal que $P \in \overline{BF} \cap \overline{AD}$ e, também, a medida $\alpha = \mathrm{m}\left(D\hat{A}E\right) = \mathrm{m}\left(E\hat{A}C\right)$, uma vez que $\overleftrightarrow{AE}$ é bissetriz[16] de $D\hat{A}C$.

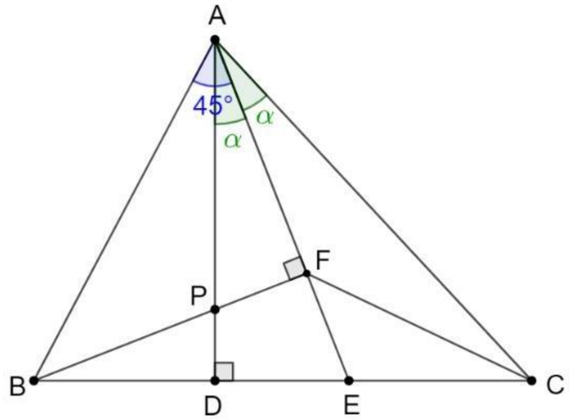

Figura 37 – Problema 4: Esboço da Situação Proposta
Elaborado pelo autor

<u>Resolução</u>: observe que, da soma das medidas dos ângulos internos do triângulo ABF, temos $\mathrm{m}\left(A\hat{B}F\right) = \mathrm{m}\left(B\hat{A}E\right) = 45°$ e, dessa forma, $AF = BF$. Observe, também, que $B\hat{P}D \cong A\hat{P}F$ [17], ângulos opostos pelo vértice, e que $P\hat{D}B \cong P\hat{F}A$, ângulos retos, e, dessa maneira, $P\hat{B}D \cong P\hat{A}F$, pela soma das medidas dos ângulos internos dos triângulos BPD e APF, ou seja, $\mathrm{m}\left(P\hat{B}D\right) = \mathrm{m}\left(P\hat{A}F\right) = \alpha$.

Como $AF = BF$, F é equidistante dos lados $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ e, dessa forma, F é ponto da bissetriz do ângulo $A\hat{C}B$. Como $\mathrm{m}\left(A\hat{C}B\right) = 90° - 2\alpha$, da soma das medidas

[15] Olimpíada Brasileira de Matemática

[16] A reta bissetriz de um ângulo corresponde à reta que passa pelo vértice V desse ângulo dividindo-o em dois outros ângulos congruentes e de mesmo vértice V. Também corresponde ao lugar geométrico dos pontos equidistantes às retas que definem esse ângulo
[17] A notação $\cong$ indica congruência entre ângulos, ou seja, ângulos de mesma medida.

dos ângulos internos do triângulo ACD, então $m\left(F\hat{C}B\right)=m\left(F\hat{C}A\right)=\dfrac{m\left(A\hat{C}B\right)}{2}=45°-\alpha$ uma vez que o segmento de reta $\overline{CF}$ está contido na bissetriz do ângulo $A\hat{C}B$.

No triângulo BCF, $m\left(F\hat{B}C\right)=m\left(P\hat{B}D\right)=\alpha$ e $m\left(F\hat{C}B\right)=45°-\alpha$. Portanto, da soma dos ângulos internos, $m\left(B\hat{F}C\right)=180°-\alpha-\left(45°-\alpha\right)=135°$.

<u>Resolução por meio do GeoGebra</u>:

<u>Passo 1</u>: semirreta $\overrightarrow{BE}$ e arco capaz[18] de 45° sobre $\overline{BE}$

Definir os pontos B e E, distintos, por meio de (F21) e determinar a semirreta $\overrightarrow{BE}$ por meio de (F34).

Determinar, por meio de (F82) o ponto E' resultante da rotação de E em 45° no sentido horário em torno de B e determinar, por meio de (F32), o segmento de reta $\overline{BE'}$. Determinar, por meio de (F41), a reta r tal que $r \perp \overline{BE'}$. Determinar, por meio de (F43), a mediatriz[19] m de $\overline{BE}$ e determinar, por meio de (F24), o ponto O tal que $O \in m \cap r$. Determinar, por meio de (F66), o arco α de centro O tal que $\{B, E\} \subset \alpha$.

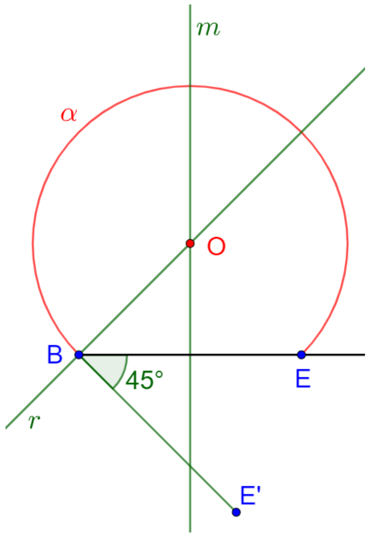

Figura 38 – Problema 4: Passo 1
Elaborado pelo autor

[18] Ver Apêndice A
[19] Mediatriz é a reta que passa pelo ponto médio do segmento de reta sendo perpendicular a este segmento. É, também, o lugar geométrico dos pontos equidistantes às extremidades desse segmento

<u>Passo 2</u>: delimitação do arco capaz

Como o triângulo ABC é acutângulo, $0° < \mathrm{m}\left(A\hat{B}C\right) < 90°$ e $0° < \mathrm{m}\left(A\hat{C}B\right) < 90°$

Da soma das medidas dos ângulos internos desse triângulo, $\mathrm{m}\left(A\hat{C}B\right) = 135° - \mathrm{m}\left(A\hat{B}C\right)$ e, então, $0° < 135° - \mathrm{m}\left(A\hat{B}C\right) < 90° \Leftrightarrow 45° < \mathrm{m}\left(A\hat{B}C\right) < 135°$. Logo, $45° < \mathrm{m}\left(A\hat{B}C\right) < 90°$.

Para garantir essa condição, devemos determinar, por meio de (F41), as retas p_1 e p_2 tais que $p_1 \perp \overrightarrow{BE}$ $B \in p_1$ e $p_2 \perp \overrightarrow{BE}$, $E \in p_2$. Em seguida, determinar, por meio de (F24), os pontos $X \in p_1 \cap \alpha$ e $Y \in p_2 \cap \alpha$. E então, determinar, por meio de (F66) o arco β de centro O tal que $\{X, Y\} \subset \beta$.

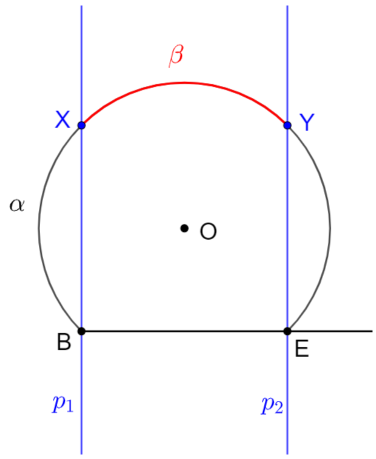

Figura 39 - Problema 4: Passo 2
Elaborado pelo autor

<u>Passo 3</u>: alturas $\overline{AD}$ e $\overline{BF}$

Definir, por meio de (F21), o ponto A tal que $A \in \beta$. Determinar, por meio de (F41), as retas s e t tais que $s \perp \overrightarrow{BE}$, $A \in s$ e $t \perp \overline{AE}$, $B \in t$. Determinar, por meio de (F24), o ponto P tal que $P \in s \cap t$.

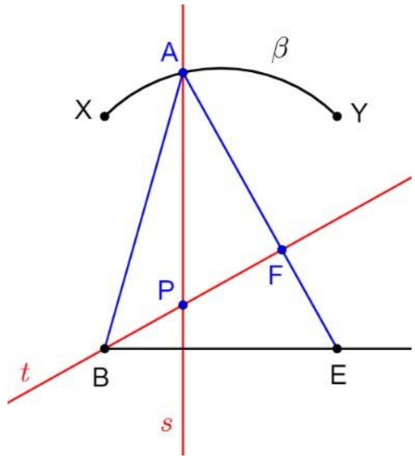

Figura 40 - Problema 4: Passo 3
Elaborado pelo autor

<u>Passo 4</u>: reta $\overleftrightarrow{AC}$, simétrica de $\overleftrightarrow{AD}$ em relação a $\overleftrightarrow{AE}$

Determinar, por meio de (F91), a reta s' simétrica de s em relação a $\overleftrightarrow{AE}$ e determinar, por meio de (F24), o ponto C tal que $C \in s' \cap \overleftrightarrow{BE}$.

Como $\overleftrightarrow{AE}$ é bissetriz de $D\hat{A}C$, $\overleftrightarrow{AE}$ reúne os pontos equidistantes de $\overleftrightarrow{AD}$ e de $\overleftrightarrow{AC}$: para quaisquer pontos $X \in \overleftrightarrow{AD}$ e $X' \in \overleftrightarrow{AC}$ tais que a distância de X à reta $\overleftrightarrow{AE}$ é igual à distância de X' à reta $\overleftrightarrow{AE}$, então X é o simétrico de X' em relação a $\overleftrightarrow{AE}$. Logo, $\overleftrightarrow{AD}$ é simétrica de $\overleftrightarrow{AC}$ em relação a $\overleftrightarrow{AE}$.

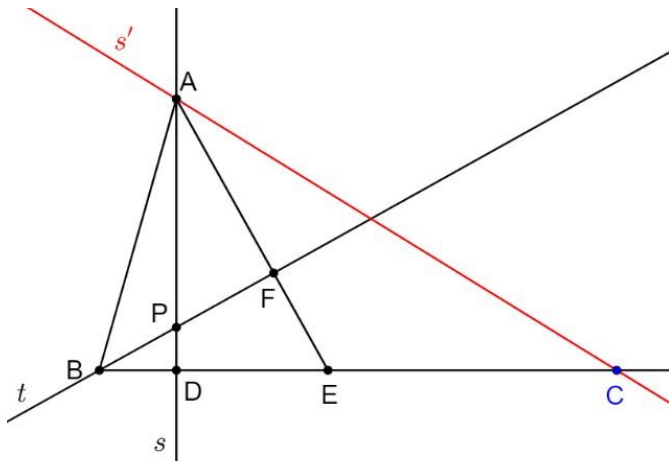

Figura 41 – Problema 4: Passo 4
Elaborado pelo autor

<u>Passo 5</u>: solução

Determinar, por meio de (F81), a medida do ângulo $B\hat{F}C$: $\mathrm{m}\left(B\hat{F}C\right) = 135°$.

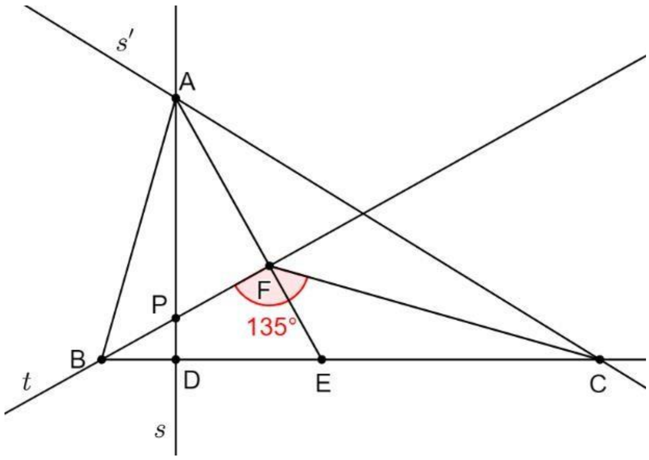

Figura 42 – Problema 4: Solução
Elaborado pelo autor

<u>Considerações</u>: a resolução que não faz uso do GeoGebra requer o conhecimento de conceitos como ângulos opostos pelo vértice, soma dos ângulos internos do triângulo, bissetriz, além de uma percepção aguçada para identificar ângulos convenientes que levem à solução. Por outro lado, o GeoGebra possibilita determinar de forma precisa a configuração do cenário, permitindo, inclusive, verificar que há infinitas configurações possíveis do triângulo ABC que mantêm a medida do ângulo em questão, embora seja possível, com pouco esforço, criar uma construção aproximada da figura que resulta em uma estimativa da solução.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O estudo da geometria emerge como um elemento essencial no processo educacional, evidenciando sua relevância em diversas esferas da vida e destacando seu papel na formação cognitiva dos estudantes. Ao longo deste trabalho, exploramos a importância do ensino da geometria e o impacto dos recursos didáticos e da tecnologia nesse processo. Destacamos a amplitude de aplicações da geometria em áreas como engenharia, arquitetura e astronomia, ressaltando sua importância como base para o desenvolvimento do pensamento espacial e do raciocínio lógico. O uso do *software* GeoGebra foi apresentado como uma ferramenta poderosa para promover o aprendizado ativo e interativo, proporcionando aos estudantes uma abordagem prática e visual para explorar conceitos geométricos.

Na resolução dos problemas apresentados, observamos diferentes abordagens, com e sem o uso do GeoGebra, cada uma com suas particularidades. Por exemplo, o Problema 1 requer o conhecimento de conceitos como área de triângulo, área de quadrado, gráfico de função afim e inequações, sendo possível visualizar graficamente o problema com o auxílio do GeoGebra, tornando o entendimento mais dinâmico e interativo. Já o Problema 2 demanda conceitos geométricos como propriedades de triângulos isósceles e equiláteros, exigindo tanto compreensão teórica quanto prática na manipulação desses elementos, enquanto o GeoGebra oferece uma resposta instantânea, embora possa limitar o desenvolvimento do raciocínio geométrico do estudante. No Problema 3, a resolução sem o GeoGebra envolve tangência entre circunferências, teorema de Pitágoras e equações quadráticas, exigindo percepção aguçada do estudante, enquanto o GeoGebra possibilita uma estimativa rápida da solução, mas a solução exata requer conhecimento de inversão geométrica. Por fim, no Problema 4, tanto a resolução com quanto sem o GeoGebra demandam compreensão dos conceitos de ângulos e bissetriz, mas o software permite determinar de forma precisa a configuração do cenário, embora seja possível, com pouco esforço, criar uma construção aproximada que resulte em uma estimativa da solução.

Essas abordagens demonstram a importância de uma reflexão pedagógica equilibrada no uso de recursos didáticos e tecnológicos, garantindo que sua implementação seja orientada por objetivos claros e organizados. Reconhecemos a necessidade de uma abordagem dinâmica e interativa no ensino da geometria, enfatizando a conexão entre teoria e prática para promover uma compreensão mais profunda e significativa. Em trabalhos futuros, há a possibilidade de utilizar as soluções dos problemas abordados neste estudo e implementá-las na sala de aula por meio do *software* GeoGebra, permitindo avaliar os ganhos no aprendizado da geometria por parte do estudante, oferecendo uma oportunidade prática de validar as abordagens propostas neste trabalho.

REFERÊNCIAS

ARAÚJO, Luís Cláudio Lopes de; NÓBRIGA, Jorge Cássio Costa. **Aprendendo matemática com o Geogebra**. Editora Exato, São Paulo, 2010. Disponível em: https://www.academia.edu/download/58080729/AprendendoMatematicaGeoGebra-Final-2010-04-27-V01-1.pdf. Acesso em outubro de 2023.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Disponível em http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. 2018. Acesso em agosto de 2023.

CARA, Daniel. Entrevista concedida em 05 de dezembro de 2023 para **Agência Brasil**. Disponível em https://agenciabrasil.ebc.com.br/educacao/noticia/2023-12/resultados-do-pisa-reforcam-gargalo-no-ensino-de-matematica-no-brasil. Acesso em março de 2024.

EUZÉBIO, Julian da Silva. **Proposta de Ensino de Geometria Analítica Utilizando o Desmos**. 2018. 112 f. Dissertação de Mestrado – Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Pato Branco, PR, 2018. Disponível em: https://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/bitstream/1/3833/1/PB_PROFMAT_M_Euz%C3%A9bio%2C%20Julian%20da%20Silva_2018.pdf. Acesso em novembro de 2023.

FERREIRA, Roberto. **Ensinando matemática com o GeoGebra**. Enciclopédia Biosfera, v. 6, n. 10, 2010. Disponível em: https://conhecer.org.br/ojs/index.php/biosfera/article/view/4650. Acesso em outubro de 2023.

GONÇALVES, Eliane. "Brasil tem desafios no ensino de matemática e língua portuguesa." **Rádio Nacional**. 01 dezembro 2022. Disponível em https://agenciabrasil.ebc.com.br/radioagencia-nacional/educacao/audio/2022-12/brasil-tem-desafios-no-ensino-de-matematica-e-lingua-portuguesa#:~:text=Sem%20aulas%20presenciais%20e%20sem,aprendizado%20adequado%20foi%20de%2047%25. Acesso em março de 2024.

GRAVINA, Maria Alice; DE OLIVEIRA CONTIERO, Lucas. **Modelagem com o GeoGebra: uma possibilidade para a educação interdisciplinar?**. RENOTE, v. 9, n. 1, 2011. Disponível em: https://doi.org/10.22456/1679-1916.21917. Acesso em outubro de 2023.

LIDSKY, V. et al. **Problems in Elementary Mathematics**. English translation, Mir Publishers, 1973.

LOPES, Maria Maroni. **Sequência didática para o ensino de trigonometria usando o software GeoGebra**. Bolema: Boletim de Educação Matemática, v. 27, p. 631-644, 2013. Disponível em: https://www.scielo.br/j/bolema/a/7jbBvcDtcR7tG7qGYwXzMQM/?lang=pt. Acesso em outubro de 2023.

LORENZATO, Sérgio. **Por que não ensinar Geometria?** A educação matemática em revista. Geometria. Blumenau, n. 04, p. 03. 1995. Disponível em: https://professoresdematematica.com.br/wa_files/0_20POR_20QUE_20NAO_20ENSINAR_20GEOMETRIA.pdf. Acesso em outubro de 2023.

MATIFIC CONTENT TEAM. "Ensino de Matemática no Brasil: quais são os desafios e as soluções." **Matific**. 09 maio 2023. Disponível em https://www.matific.com/bra/pt-br/home/blog/2023/05/09/ensino-de-matem%C3%A1tica-no-brasil-quais-s%C3%A3o-os-desafios-e-as-solu%C3%A7%C3%B5es/. Acesso em março de 2024.

NASCIMENTO, Eimard G A do. **Avaliação do uso do software GeoGebra no ensino de geometria: reflexão da prática na escola**. In: Acta de la Conferencia Latinoamericana de Geogebra. Uruguay. ISSN. 2012. p. 2301-0185. Disponível em http://www.geogebra.org.uy/2012/actas/procesadas1443685856/67.pdf. Acesso em outubro de 2023.

OBMEP – IMPA. Provas e Soluções. Disponível em https://www.obmep.org.br/provas.htm. Acesso em abril de 2024.

OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA. Provas e Gabaritos. Disponível em https://www.obm.org.br/como-se-preparar/provas-e-gabaritos/. Acesso em abril de 2024.

PAIS, Luiz Carlos. **Uma análise do significado da utilização de recursos didáticos no ensino da geometria**. Reunião da ANPED, v. 23, p. 24, 2000. Disponível em:

http://www.ufrrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_23/analise_significado.pdf. Acesso em outubro de 2023.

PASSOS, Éderson Oliveira; TAKAHASHI, Eduardo Kojy. Recursos didáticos nas aulas de matemática nos anos iniciais: critérios que orientam a escolha e o uso por parte de professores. **Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos**, v. 99, p. 172-188, 2018.

PETLA, Relelino José; ROLKOWSKI, Emerson. **Geogebra–Possibilidades para o ensino de matemática**. Natal: UFRN, 2008. Disponível em: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/1419-6.pdf. Acesso em novembro de 2023.

SOUSA, Angélica Silva de; OLIVEIRA, Guilherme Saramago de; ALVES, Laís Hilário. **A pesquisa bibliográfica: princípios e fundamentos**. Cadernos da FUCAMP, v. 20, n. 43, 2021. Disponível em: https://revistas.fucamp.edu.br/index.php/cadernos/article/view/2336/1441. Acesso em outubro de 2023.

SOUZA, Daniel Mendes Inácio de; ABAR, Celina Aparecida Almeida Pereira. Um estudo sobre as potencialidades da utilização do GeoGebra Discovery no contexto da Geometria Plana. **Educação Matemática em Revista**, v. 28, n. 80, p. 1-15, 2023.

APÊNDICE A – Arco Capaz

O arco capaz de θ sobre o segmento de reta $\overline{AB}$ é o conjunto dos pontos P do plano tais que $\mathrm{m}\left(A\hat{P}B\right)=\theta$. A construção por régua e compasso envolve os seguintes passos:

1) determina-se a reta $\overleftrightarrow{AB'}$ tal que $\mathrm{m}\left(B\hat{A}B'\right)=\theta$ transportando a medida θ;
2) traça-se a reta r tal que $r \perp \overleftrightarrow{AB'}$ e $A \in r$;
3) traça-se a mediatriz m de $\overline{AB}$;
4) determina-se o ponto O tal que $O \in m \cap r$ e traça-se o arco α de centro O que passa por A e por B tal que α está no semiplano que não contém B'.

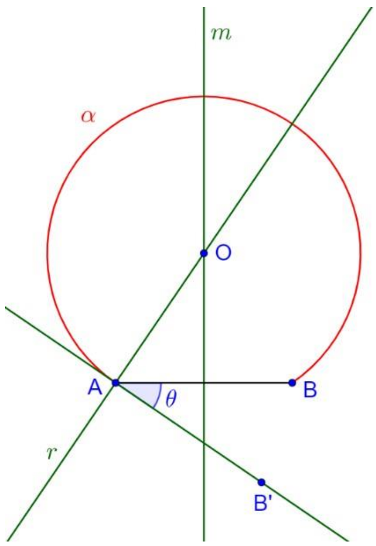

Figura 43 – Construção do Arco Capaz
Elaborado pelo autor

Observe que $\mathrm{m}\left(O\hat{A}B\right)=90°-\theta$ e, como $OA=OB$ correspondem ao raio do arco α, o triângulo OAB é isósceles e, assim, $\mathrm{m}\left(O\hat{B}A\right)=\mathrm{m}\left(O\hat{A}B\right)=90°-\theta$. Logo, pela soma dos ângulos internos do triângulo OAB, $\mathrm{m}\left(B\hat{O}A\right)=2\theta$. Portanto, para qualquer ponto $P \in \alpha$, temos, pelo Teorema do Ângulo Inscrito, $\mathrm{m}\left(B\hat{O}A\right)=2\cdot\mathrm{m}\left(A\hat{P}B\right)\Leftrightarrow\mathrm{m}\left(A\hat{P}B\right)=\theta$.

Vale destacar que o arco capaz de 90° sobre $\overline{AB}$ é a semicircunferência de centro no ponto médio de AB.

APÊNDICE B – Inversão Em Relação A Uma Circunferência

Considerando uma circunferência Γ de centro O e raio r contida num plano α, a inversão de centro O e raio r é uma transformação que associa um ponto P' a cada ponto P, distinto de O, de modo que $P' \in \overrightarrow{OP}$ e $OP \cdot OP' = r^2$. Neste cenário, P' é o inverso de P em relação a Γ e O é o polo de inversão.

Uma maneira de determinar o ponto P' é por meio de construções por régua e compasso:

1) traçar a semirreta $\overrightarrow{OP}$ e o diâmetro $\overline{AB}$ tal que $\overline{AB} \perp \overrightarrow{OP}$;

2) traçar a semirreta $\overrightarrow{AP}$ e determinar o ponto C tal que $C \in \overrightarrow{AP} \cap \Gamma$;

3) traçar a semirreta $\overrightarrow{BC}$ e determinar o ponto P' tal que $P' \in \overrightarrow{BC} \cap \overrightarrow{OP}$.

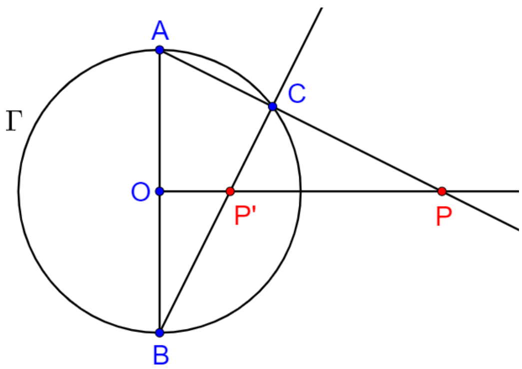

Figura 44 – Construção do Inverso de um Ponto em Relação a uma Circunferência

Elaborado pelo autor

Observe que os triângulos OBP' e OPA são semelhantes pelo caso AA, uma vez que $B\hat{O}P' \cong P\hat{O}A$ e $OP'B \cong O\hat{A}P$, e, dessa forma, $\frac{OP'}{OB} = \frac{OA}{OP}$. Como $OA = OB = r$, temos $\frac{OP'}{r} = \frac{r}{OP} \Leftrightarrow OP \cdot OP' = r^2$.

Por meio do GeoGebra, o ponto P' pode ser facilmente obtido pela ferramenta (F93).

O uso da inversão em relação a uma circunferência está relacionado principalmente a problemas que envolvem tangência entre circunferências devido a algumas propriedades que facilitam a sua resolução:

i) **A inversão de uma reta s que passa por O é a própria reta s, com exceção do ponto O**

Da definição do inverso de um ponto P, decorre que O, P e P' são colineares. Logo, para qualquer ponto $P \in s$, $P \neq O$, tal que $O \in s$, o inverso $P' \in s$, $P' \neq O$ e, dessa forma, a inversão de s é a própria s com exceção de O.

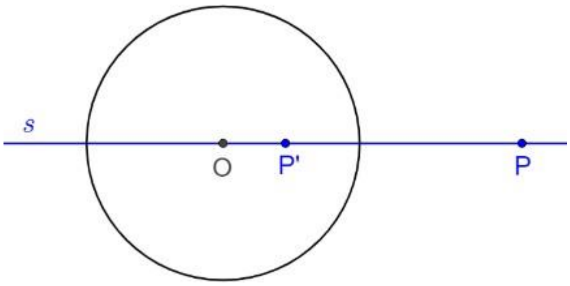

Figura 45 – Inversão de uma Reta que passa pelo Polo de Inversão
Elaborado pelo autor

ii) **A inversão de uma reta s que não contém O é uma circunferência** y **que passa por O, com exceção do ponto O e vice-versa**

Considere o ponto $A \in s$ tal que $\overrightarrow{OA} \perp s$. Sendo A' o inverso de A, temos $A' \in \overrightarrow{OA}$ tal que $OA' \cdot OA = r^2$. Nesse cenário, para qualquer ponto $B \in s$, o inverso $B' \in \overrightarrow{OB}$ é tal que $OB' \cdot OB = r^2$ e $B\hat{O}A \cong A'\hat{O}B'$. Como $\frac{OB' \cdot OB}{OA' \cdot OA} = 1 \Leftrightarrow \frac{OB'}{OA'} = \frac{OA}{OB}$, os triângulos OBA e $OA'B'$ são semelhantes pelo caso LAL e, então, $O\hat{B'}A' \cong O\hat{A}B$. Como $\overrightarrow{OA} \perp s$, $\mathrm{m}\left(O\hat{A}B\right) = 90°$ e, assim, $\mathrm{m}\left(O\hat{B'}A'\right) = 90°$. Portanto, como para qualquer $B \in s$ o inverso B' é tal que $\mathrm{m}\left(O\hat{B'}A'\right) = 90°$, B' é ponto dos arcos capazes de 90° sobre $\overline{OA'}$, ou seja, da circunferência definida por O, A' e B', mas que não passa por O.

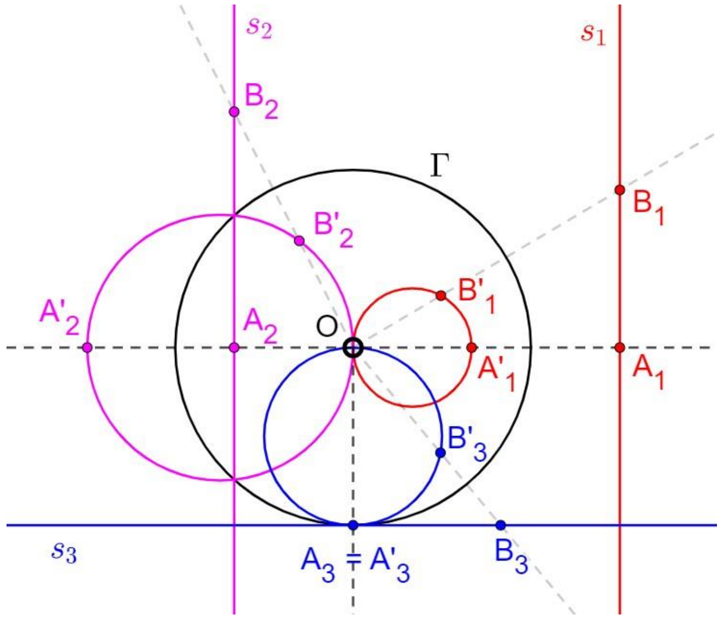

Figura 46 – Inversão de uma Reta que não passa pelo Polo de Inversão
Elaborado pelo autor

iii) A inversão de uma circunferência que não passa por *O* é uma circunferência

Considere os pontos A e B de uma circunferência α tais que $\overline{AB}$ é diâmetro de α. Sendo A' e B' os inversos de A e B, respectivamente, observe que O, A, A', B e B' são colineares, que $OA' \cdot OA = r^2$ e que $OB' \cdot OB = r^2$. Além disso, para qualquer ponto $C \in \alpha$, distinto de A e de B, a medida $\mathrm{m}\left(A\hat{C}B\right) = 90°$ e o inverso $C' \in \overrightarrow{OC}$ é tal que $OC' \cdot OC = r^2$.

Como $\dfrac{OA}{OC} = \dfrac{OC'}{OA'}$ e $A\hat{O}C \cong C'\hat{O}A'$, os triângulos AOC e $C'OA'$ são semelhantes pelo caso LAL e, assim, $\mathrm{m}\left(O\hat{C}A\right) = \mathrm{m}\left(OA'C'\right) = \theta$. Dessa forma, $\mathrm{m}\left(O\hat{C}B\right) = \theta + 90°$. Como $\dfrac{OB}{OC} = \dfrac{OC'}{OB}$ e $B\hat{O}C \cong C'\hat{O}B'$, os triângulos BOC e $C'OB'$ são semelhantes pelo caso LAL e, então, $\mathrm{m}\left(OB'C'\right) = \mathrm{m}\left(O\hat{C}B\right) = \theta + 90°$. Logo, como $OB'C'$ é ângulo externo do triângulo $A'B'C'$,

$\mathrm{m}\left(OB'C'\right) =$

$\mathrm{m}\left(OA'C'\right)+$

$\mathrm{m}\left(A'C'B'\right).$

Portanto,

$\mathrm{m}\left(A'C'B'\right) = \theta + 90° - \theta = 90°$ e, então C' é ponto dos arcos capazes de 90° sobre $\overline{A'B'}$.

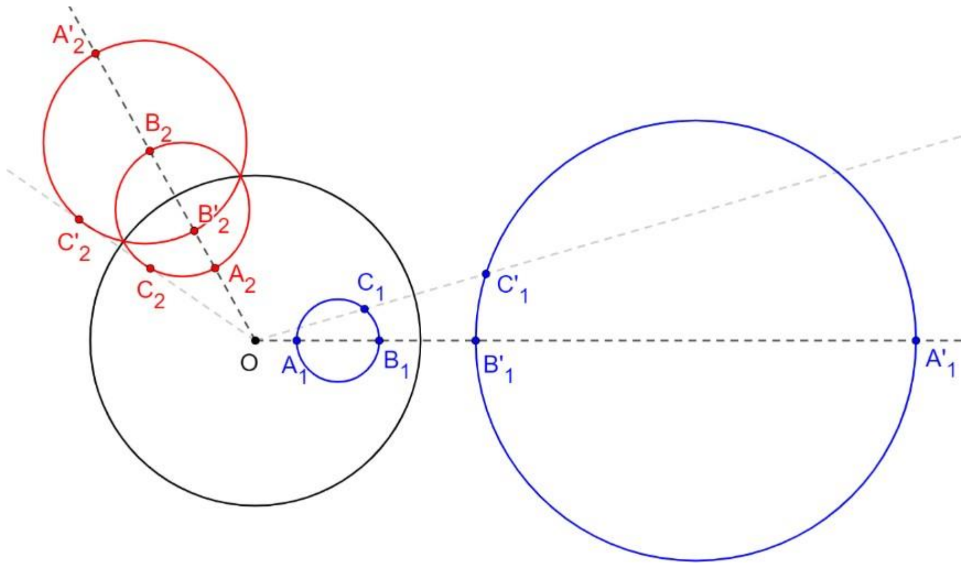

Figura 47 – Inversão de uma Circunferência que não passa pelo Polo de Inversão
Elaborado pelo autor