

UNIVERSIDADE PRESBITERIANA MACKENZIE

Ronaldo de Castro Corrêa

Nova caracterização da noção de reversibilidade parcial para autômatos  
celulares unidimensionais em reticulado cíclico, com foco no espaço  
elementar

São Paulo  
2015

**UNIVERSIDADE PRESBITERIANA MACKENZIE**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM**  
**ENGENHARIA ELÉTRICA E COMPUTAÇÃO**

Ronaldo de Castro Corrêa

Nova caracterização da noção de reversibilidade parcial para autômatos  
celulares unidimensionais em reticulado cíclico, com foco no espaço  
elementar

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa  
de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica e  
Computação da Universidade Presbiteriana  
Mackenzie como parte dos requisitos para  
obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica

Orientador: Prof. Dr. Pedro Paulo B. de Oliveira

São Paulo  
2015

C824c Corrêa, Ronaldo de Castro

Nova caracterização da noção de reversibilidade parcial para autômatos celulares unidimensionais em reticulado cíclico, com foco no espaço elementar /

Ronaldo de Castro Corrêa - 2015.

94f.: il., 30 cm

Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) –  
Universidade Presbiteriana Mackenzie, São Paulo, 2015.

Orientação: Prof. Dr. Pedro Paulo B. de Oliveira

Bibliografia: f. 65-66

1. Autômato celular unidimensional.
2. Regra reversível
3. Regra parcialmente reversível.
4. Reversibilidade parcial.
5. Espaço elementar. I. Título.

CDD 511.3

Ronaldo de Castro Corrêa

Nova caracterização da noção de reversibilidade parcial para autômatos celulares unidimensionais em reticulado cíclico, com foco no espaço elementar

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica e Computação da Universidade Presbiteriana Mackenzie como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Dr. Pedro Paulo B. de Oliveira

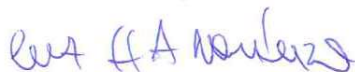
Aprovado em 23 DE NOVEMBRO DE 2015.

BANCA EXAMINADORA




---

Prof<sup>o</sup>. Dr. Pedro Paulo B. de Oliveira  
Universidade Presbiteriana Mackenzie



---

Prof<sup>o</sup>. Dr. Luiz Henrique Alves Monteiro  
Universidade Presbiteriana Mackenzie



---

Prof<sup>o</sup>. Dr. Arnaldo Vieira Moura  
Universidade Estadual de Campinas - Unicamp

## Agradecimentos

*Agradeço o Prof. Dr. Pedro Paulo B. de Oliveira pela orientação realizada neste trabalho, pelo incentivo e dedicação ao tema.*

*Agradeço a todos que estiveram envolvidos diretamente ou indiretamente neste trabalho.*

*Dedico este trabalho à minha mãe Célia Santos de Castro e minha namorada Vanessa Ayres da Silva, que sempre me apoiaram no decorrer deste trabalho; também dedico este trabalho em memória de meu pai José Ronaldo Corrêa.*

## RESUMO

Autômatos celulares são sistemas dinâmicos discretos que, por meio de regras de ação local, até mesmo muito simples, podem apresentar processamento global arbitrariamente complexo. A reversibilidade é uma propriedade que poucas regras possuem e que garante a existência de uma regra inversa capaz de reverter a evolução temporal da regra original. Para uma regra ser reversível, todas as configurações possíveis de reticulado devem possuir somente uma única configuração antecessora, ou seja, uma única pré-imagem.

Nesse contexto, havia sido proposto na literatura o conceito de regras poderem ser caracterizadas por sua reversibilidade parcial relativa, ou seja, regras poderem ser mais ou menos reversíveis que outras. Essa noção é representada por meio do padrão de pré-imagem da regra, que é composto pelas quantidades ordenadas de pré-imagens de todas as configurações possíveis de reticulado, até um tamanho máximo. Para classificar as regras das mais reversíveis para as menos reversíveis, ou agrupá-las caso possuíssem a mesma reversibilidade, era feita a ordenação lexicográfica dos padrões de pré-imagens.

Este trabalho reavaliou a definição original, com base nos autômatos celulares elementares, apesar de os resultados serem aplicáveis a qualquer outra família unidimensional de regras. Assim, foi proposta uma grandeza que representa o nível de reversibilidade de uma regra, também baseada em seu padrão de pré-imagem, mas agora a partir da probabilidade de reverter corretamente cada configuração possível de reticulado, até um tamanho máximo dado. Tal medida permite analisar o nível de reversibilidade de uma regra em termos absolutos, e não mais relativamente a outras regras.

Dessa forma, torna-se possível analisar individualmente os níveis de reversibilidade das regras, o que possibilitou inferir o nível de reversibilidade de regras para reticulados arbitrariamente maiores que os calculados, em particular, identificando regras que tendem a ser reversíveis conforme o tamanho do reticulado tende a infinito.

Também foi possível definir uma operação que, a partir das próprias transições de estado de uma regra, permite obter parcialmente as regras que possuem o mesmo nível de reversibilidade, sem a necessidade do cálculo do padrão de pré-imagem, que é extremamente custoso computacionalmente.

**Palavras-chave:** *Autômato celular unidimensional; regra reversível; regra parcialmente reversível; reversibilidade parcial; espaço elementar.*

## ABSTRACT

Cellular automata are discrete dynamic systems that by local action rules, even very simple, can present arbitrarily complex global processing. The reversibility is a property that a few rules have and guarantees the existence of an inverse rule capable of reversing the temporal evolution of the original rule. For a rule to be reversible all possible configurations of lattices must have only one predecessor, i.e., only one pre-image.

In this context, it had been proposed in the literature the concept of rules may be characterized by its relative partial reversibility, that is, rules can be more or less reversible than others. This notion is represented by the rule pre-image pattern, which is composed of the quantities ordered pre-images of all the possible configurations of lattices up to a maximum size. To sort the rules of the reversible for less reversible, or group them if they had the same reversibility was made lexicographical ordering patterns of pre-images.

This paper reviewed the original definition, based on elementary cellular automata, although the results are applicable to any other one-dimensional family rules. Thus, proposed it was a measure of the reversibility level of a rule, also based on its default pre-image, but now from the probability of correctly reverse each possible configurations of lattices up to a given maximum size. This measure allows us to analyze the degree of reversibility of a rule in absolute terms and not relative to other rules.

Thus, it becomes possible to individually analyze the reversibility levels of rules, making it possible to infer the degree of rules reversible for lattices arbitrarily larger than calculated, in particular, identifying rules that tend to be reversible when the size of the lattices tends to infinity.

It was also possible to define an operation that, from their own state transitions rule, allows to obtain partially rules that have the same level of reversibility without the need of standard calculating preview image, which is extremely expensive computationally.

**Palavras-chave:** *One-dimensional cellular automaton; reversible rule; partially reversible rule; partial reversibility; elementary space.*

# Lista de Figuras

1	Evolução temporal de um autômato celular. . . . .	4
2	Reticulados unidimensional e bidimensional. . . . .	5
3	Vizinhança definida por $N$ , reticulados unidimensional e bidimensional. .	6
4	Espaço elementar de regras (WOLFRAM, 2002). . . . .	7
5	Representação do reticulado de tamanho $L$ , com os estados do conjunto $S$ .	8
6	Vizinhança de uma célula. . . . .	8
7	Vizinhança não simétrica de uma célula. . . . .	8
8	Evolução temporal das equivalentes dinâmicas da regra 2. . . . .	11
9	Regras reversíveis. . . . .	13
10	Diagrama de estados da regra 15 para $L = 5$ . . . . .	14
11	Diagrama de estados da regra 150. . . . .	15
12	Grafo de De Bruijn $(k, e) = (2, 2)$ (MCINTOSH, 1991). . . . .	17
13	Grafo de De Bruijn Regra 30 no espaço elementar (MCINTOSH, 1991). .	18
14	Vértices do grafo de De Bruijn modificado. . . . .	19
15	Vizinhanças da regra 110 no grafo de De Bruijn. . . . .	20
16	Substituição das vizinhanças pelos próximos estados. . . . .	20
17	Grafo de De Bruijn modificado da regra 110. . . . .	21
18	Grafo $G_C$ para o reticulado $C = \{0, 0, 1, 1\}$ . . . . .	21
19	Busca de pré-imagem, <i>overlap</i> inicial $o_E = 00$ . . . . .	25
20	Busca de pré-imagem, <i>overlap</i> inicial $o_E = 10$ . . . . .	26
21	Busca de pré-imagem, <i>overlap</i> inicial $o_E = 11$ . . . . .	27
22	Diagrama de estados da regra elementar 3. para $L = 5$ . . . . .	30
23	Modelo direto até para $L_{max} = 18$ (DE OLIVEIRA; FREITAS, 2010, pág. 48). . . . .	33
24	Modelo absoluto até para $L_{max} = 18$ (DE OLIVEIRA; FREITAS, 2010, pág. 47). . . . .	34
25	Reversibilidade parcial relativa no espaço elementar, $L_{max} = 32$ . . . . .	43
26	Níveis de reversibilidade das regras no espaço elementar, $L_{max} = 6, \dots, 32$ .	45
27	Ordem de crescimento dos componentes da equação $\delta_R$ . . . . .	53
28	GDBm's das regras 45 e 180. . . . .	59



29	Isomorfismo dos GDBm's das regras 45 e 180. . . . .	60
30	GDBm's das regras 45 e 101. . . . .	61

## Lista de Tabelas

1	Conjugação da regra 2. . . . .	10
2	Reflexão da regra 2. . . . .	10
3	Conjugação-Reflexão da regra 2. . . . .	11
4	Classes de equivalência dinâmica do espaço elementar. . . . .	12
5	Condições especiais de reversibilidade no espaço elementar. Fonte: (INO-KUCHI, 2007, pág. 31). . . . .	16
6	Regra elementar 110 ( $r = 1$ e $S = \{0, 1\}$ ). . . . .	19
7	Classificação das PRCs. . . . .	46
8	Frequência de ocorrência das quantidades de pré-imagens da regra 105. . . . .	47
9	Valores de seno e cosseno em função de $\frac{2\pi \cdot x}{3}$ . . . . .	48
10	Frequência de ocorrência das quantidades de pré-imagens da regra 90. . . . .	49
11	Frequência de ocorrência das quantidades de pré-imagens da regra 45. . . . .	51
12	Classes de Reversibilidade Parcial (PRCs). . . . .	55
13	Equivalentes dinâmicas e transições de estados para a PRC $\{45,154\}$ . . . . .	56
14	Conjugação da vizinhança. . . . .	57
15	Resultado da função $\mathcal{NC}$ para todas as representantes das regras dinamicamente equivalentes no espaço elementar . . . . .	57
16	Comparativo dos conjuntos $PRC_1$ , $PRC_2$ e $PRC_4$ entre as tabelas Tabela 12 e Tabela 15. . . . .	58
17	Frequência de ocorrência das quantidades de pré-imagens da regra 105. . . . .	76
18	Valores de seno e cosseno em função de $\frac{2\pi \cdot x}{3}$ . . . . .	77
19	Frequência de ocorrência das quantidades de pré-imagens da regra 90. . . . .	78
20	Frequência de ocorrência das quantidades de pré-imagens da regra 60. . . . .	80
21	Frequência de ocorrência das quantidades de pré-imagens da regra 30. . . . .	80

## LISTA DE ABREVIATURAS

AC	: Autômato Celular
$t$	: Passo
$S$	: Conjunto de estados
$k$	: Tamanho do conjunto de estados
$N$	: Conjunto de posições das células vizinhas
$f$	: Função local de transição de estado
$m$	: Tamanho da vizinhança de uma célula
$Z^d$	: Reticulado de dimensão $d$
$C$	: Representação de um reticulado
$c$	: Célula de um reticulado
$\vec{n}$	: Posição de uma célula no reticulado
$N_S(\vec{n})$	: Estados das células vizinhas de uma célula na posição $\vec{n}$
$c(\vec{n})$	: Estado de uma célula na posição $\vec{n}$ de um reticulado
$F$	: Função global de transição de estado
$r$	: Raio de uma vizinhança
$L$	: Tamanho do reticulado
$GoE$	: Garden of Eden
$f^{-1}$	: Função local inversa de transição de estados
$F^{-1}$	: Função global inversa de transição de estados
$e$	: Tamanho da cadeia de símbolos do Grafo de De Bruijn
$R$	: Regra de um AC
$GDBm^{(R)}$	: Grafo de De Bruijn modificado de uma regra $R$
$o_s^{t-1}$	: Vértices da extrema esquerda do $GDBm$ .
$o_d^{t-1}$	: Vértices da extrema direita do $GDBm$
$D^{(R)}(s_i)$	: $GDBm$ de um estado $s_i$ de uma regra $R$
$D^{(R)}(s_i)$	: Matriz de adjacência de um $GDBm$ de estado $s_i$ de uma regra $R$
$d_{o_s, o_d}(s_i)$	: Posição da matriz de adjacência $D_{adj}^{(R)}(s_i)$
$G_C$	: Configuração do reticulado representados por grafos de De Bruijn modificados

$o_E$	:	Vértices da extrema esquerda de $G_C$
$o_D$	:	Vértices da extrema direita de $G_C$
$b$	:	Vetor de condição de contorno
$b_E$	:	Vetor de condição de contorno de $o_E$
$b_D$	:	Vetor de condição de contorno de $o_D$
$b_u$	:	Vetor de condição de contorno irrestrito
$p_c$	:	Número de pré-imagens para condição de contorno cíclica
$p_f$	:	Número de pré-imagens para condição de contorno fixa
$D^{(R)}(C)$	:	Matriz de cálculo de pré-imagens do reticulado $C$ de uma regra $R$
$d_p$	:	Diagonal principal da matriz $D^{(R)}(C)$
$L_{max}$	:	Tamanho máximo de reticulado
$\mathcal{P}_{dir}^{(R)}$	:	Padrão de pré-imagem do modelo direto
$\mathcal{P}_{abs}^{(R)}$	:	Padrão de pré-imagem do modelo absoluto
PRC	:	Classes de reversibilidade parcial ( <i>Partial Reversibility Classes</i> )
$\mathcal{NC}$	:	Conjugada da vizinhança (Neighborhood Conjugate Rule)
$G(V, E)$	:	Grafo composto pelo conjunto de vértices $V$ e conjunto arestas $E$
$f_{iso}$	:	Função de isomorfismo de grafos
$\mathcal{P}_R$	:	Padrão de pré-imagem de uma regra $R$
$\delta_R(\mathcal{P}_R)$	:	Função que recebe um padrão de pré-imagem e retorna o nível de reversibilidade de uma regra
$\delta'_R(L_{max})$	:	Função que recebe o tamanho máximo de reticulado e retorna o nível de reversibilidade de uma regra
$\approx$	:	PRCs em que seus respectivos níveis são estáveis ou possuem variação periódica
$\uparrow\downarrow$	:	PRCs em que seus respectivos níveis tendem a 100
$\neg\uparrow\downarrow$	:	PRCs em que seus respectivos níveis tendem a 0

# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>REFERENCIAL TEÓRICO</b>	<b>4</b>
2.1	Autômatos Celulares . . . . .	4
2.1.1	Autômatos Celulares Elementares . . . . .	7
2.1.2	Equivalência dinâmica no espaço elementar . . . . .	9
2.2	Reversibilidade de regras . . . . .	12
2.3	Grafos de De Bruijn . . . . .	16
2.4	Contagem e Listagem de pré-imagens . . . . .	18
2.4.1	Grafo de De Bruijn modificado . . . . .	19
2.4.2	Contagem de pré-imagens em um reticulado . . . . .	22
2.4.3	Listagem de pré-imagens . . . . .	24
2.5	Reversibilidade Parcial . . . . .	27
<b>3</b>	<b>REVISITANDO A NOÇÃO DE REVERSIBILIDADE PARCIAL</b>	<b>37</b>
3.1	INTRODUÇÃO: ASPECTOS METODOLÓGICOS . . . . .	37
3.2	REVERSIBILIDADE PARCIAL COMO UMA PROPRIEDADE DA RE- GRA . . . . .	38
<b>4</b>	<b>CLASSES DE REVERSIBILIDADE PARCIAL</b>	<b>55</b>
<b>5</b>	<b>CONCLUSÃO</b>	<b>62</b>
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	<b>66</b>
	<b>APÊNDICE A - Ordenação lexicográfica do espaço elementar, para <math>L_{max} = 18</math> e <math>L_{max} = 33</math></b>	<b>67</b>
	<b>APÊNDICE B - Ordenação lexicográfica absoluta do espaço ele- mentar, para <math>L_{max} = 33</math></b>	<b>68</b>
	<b>APÊNDICE C - Níveis de reversibilidade do espaço elementar, para <math>L_{max} = 32</math></b>	<b>69</b>
	<b>APÊNDICE D - Limite das funções dos nível de reversibilidade</b>	<b>76</b>

# 1 INTRODUÇÃO

Um autômato celular (AC) é um sistema dinâmico discreto composto por células dispostas na forma de um reticulado  $d$  dimensional: unidimensional (vetor), bidimensional (matriz), etc. Cada célula possui um estado discreto que muda de forma síncrona com as demais. O próximo estado de uma célula é definido a partir de seu próprio estado e do estado de suas células vizinhas, ou seja, as mudanças de estado são determinadas por regras que atuam localmente em cada célula do reticulado.

Ao aplicar uma regra em todas as células de um reticulado, a cada passo de tempo  $t$ , obtém-se uma nova configuração de reticulado. No caso dos ACs elementares as regras são representadas por um número inteiro de 0 à 255, e são chamadas de regras no espaço elementar (WOLFRAM, 2002).

Algumas regras de ACs possuem uma característica que permite que uma evolução temporal seja refeita independente das configurações possíveis de reticulado por meio de sua regra inversa correspondente; essa propriedade é chamada de reversibilidade. Para uma regra ser reversível, todas as configurações possíveis de reticulado em um passo  $t$  devem possuir somente uma única configuração antecessora em um passo  $t - 1$ ; ou seja, devem possuir uma única pré-imagem (POWLEY, 2009). A reversibilidade de regras em autômatos celulares tem aplicações em áreas como criptografia, preservação de informação, etc (TOFFOLI; MARGOLUS, 1994).

Existem muitos estudos realizados na área de reversibilidade em autômatos celulares, tanto visando compreender as propriedades dessas regras, quanto para criar algoritmos para detectar ou construir autômatos celulares reversíveis; por exemplo, Moraal (2000) propõe um algoritmo que constrói regras reversíveis a partir de uma matriz de regra dos pares mais próximos; o resultado do algoritmo são dois grafos em que, caso não possuam nenhuma aresta em comum, as regras são reversíveis. Boykett (2004) apresenta um algoritmo para construção de autômatos celulares unidimensionais reversíveis por meio de um modelo algébrico. Mora et al. (2005) propõem um algoritmo para verificar se uma regra de um AC é reversível ou não; apesar de o método utilizar operações matriciais simples que facilitam a implementação do algoritmo, para alguns casos o método

demanda grande tempo computacional. Dada uma configuração de um AC, Jeras e Dobnikar (2007) propõem um algoritmo para listar as possíveis configurações anteriores de uma configuração, ou seja, suas possíveis pré-imagens; o algoritmo utiliza uma adaptação dos grafos de De Bruijn. Kronemberger e de Oliveira (2011) observaram que as regras reversíveis possuem uma lei de formação simétrica e ao realizar o complemento das transições de estado, obtém-se outra regra reversível; com essa observação foi definido o conceito da  $k$ -simetria.

No estudo realizado por de Oliveira e Freitas (2010) foi introduzida a noção de *reversibilidade parcial*, que consiste em classificar regras segundo elas serem mais ou menos reversíveis, e também introduziu-se a noção de agrupar as que possuem a mesma reversibilidade parcial, em classes de equivalência. A reversibilidade parcial é representada por meio do padrão de pré-imagem, que é um multiconjunto composto pelas quantidades de pré-imagens de todas as configurações possíveis, até um tamanho máximo de reticulado; para classificar as regras das mais reversíveis para as menos reversíveis é utilizada a ordenação lexicográfica dos padrões de pré-imagem.

Nesta classificação estão os conjuntos de regras reversíveis em um extremo, e as menos reversíveis no outro. O conjunto de regras reversíveis contém as regras que possuem uma única pré-imagem para cada configuração de reticulado possível; já as menos reversíveis são as regras para as quais todas as configurações são pré-imagens de uma única configuração. Os demais conjuntos contêm as regras que possuem mais de uma pré-imagem para uma ou mais configurações possíveis, até o tamanho máximo de reticulado analisado.

O objetivo desta pesquisa foi continuar o estudo da reversibilidade parcial proposto por de Oliveira e Freitas (2010), levantando as seguintes questões: A ordenação lexicográfica seria a melhor maneira de diferenciar qual regra é mais reversível que a outra? Se não, seria possível definir um modelo adequado, baseado em uma grandeza que represente o nível de reversibilidade por meio do padrão de pré-imagem? Sendo possível definir o nível de reversibilidade, como se comportariam os níveis de reversibilidade das regras? Finalmente, dado que a geração do padrão de pré-imagem é um processo que demanda alto tempo de processamento e requer grande espaço de armazenamento, seria possível estabelecer uma relação entre as regras que possuíssem o mesmo nível de reversibilidade e

obter o mesmo agrupamento apenas com a definição da própria regra sem gerar o padrão de pré-imagem?

Esta pesquisa restringe-se a ACs unidimensionais em parte devido ao resultado em Kari (2005) de que não existe um algoritmo que determine se uma regra arbitrária é reversível para reticulados com dimensões superiores a 1; apesar dessa impossibilidade, estender a noção da reversibilidade parcial para outras dimensões de reticulado pode ser válida, restringindo-se a quantidade de estados ou a família de regras. Mais fundamentalmente, o motivo principal das restrições adotadas aqui é tornar a análise da reversibilidade parcial mais simples e assim que os resultados desejados forem alcançados as restrições podem ser removidas e o estudo ser continuado.

No Capítulo 2 são descritos os conceitos utilizados, notações e algoritmos para calcular e listar as pré-imagens. No Capítulo 3 a reversibilidade parcial é revisitada, propondo-se sua caracterização como uma propriedade da regra, a partir da definição de uma grandeza que represente seu nível de reversibilidade. No Capítulo 4 apresenta-se uma operação que, por meio da definição da regra, obtém parcialmente as classes de reversibilidade parcial. No último capítulo discutem-se os resultados da pesquisa.



## 2 REFERENCIAL TEÓRICO

### 2.1 Autômatos Celulares

Autômatos celulares (ACs) são sistemas dinâmicos discretos. Três pontos os definem como sistemas dinâmicos discretos: espaço, tempo e estado. O espaço dos autômatos celulares é chamado de reticulado, e representa um espaço finito ou infinito contendo células. Cada célula do reticulado pode assumir um estado discreto, e sua vizinhança é definida pelos estados dela própria e do das células vizinhas. As mudanças de estado das células ocorrem sincronamente em todo o reticulado e são definidas por meio de regras locais atuando sobre a vizinhança (KARI, 2005).

Cada mudança de estado do conjunto de células do reticulado representa um passo, e a sequência de passos define sua evolução temporal. Os ACs podem apresentar comportamento global complexo, apesar do processamento ser local e poder ser bastante simples (POWLEY, 2009). A Figura 1 ilustra a evolução temporal de um AC com 28 passos representados por  $t$ , de um reticulado unidimensional de tamanho 57, com uma única célula no estado 1 na condição inicial.

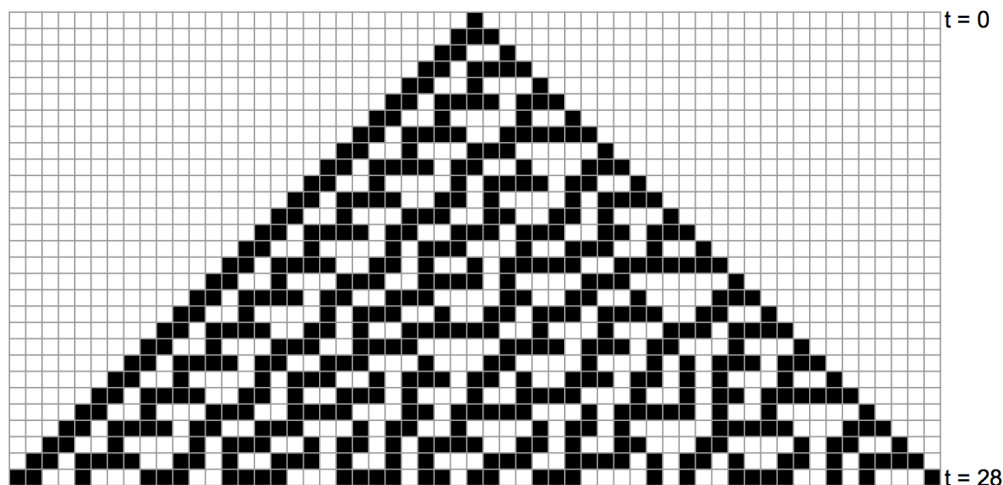


Figura 1: Evolução temporal de um autômato celular.

Formalmente, o autômato celular é definido pela *tripla*  $(S, N, f)$ , sendo  $S$  o conjunto

finito de estados  $S = \{s_0, s_1, \dots, s_{k-1}\}$ ,  $N$  o vetor de posições das células vizinhas, e  $f : S^m \rightarrow S$  é a função de transição de estado local de uma célula, na qual  $m$  é o tamanho da vizinhança. O reticulado é denotado por  $Z^d$ , em que  $d$  é o número de dimensões e  $d > 0$  (KARI, 2005). A Figura 2a representa um reticulado unidimensional e a Figura 2b um bidimensional.

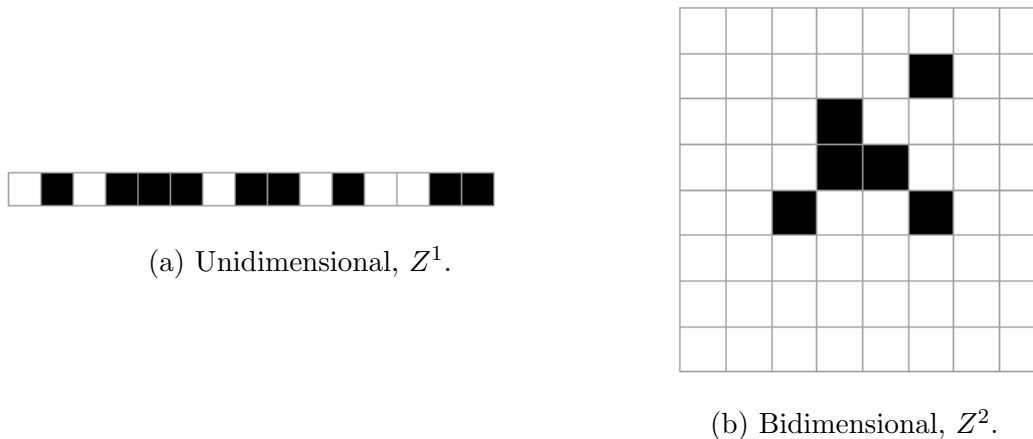


Figura 2: Reticulados unidimensional e bidimensional.

O reticulado é composto por células que podem assumir estados definidos pelo conjunto finito  $S$ . As Figuras 2a e 2b possuem o conjunto de estados  $S = \{0, 1\}$ . A mudança dos estados das células em um reticulado é realizada sincronamente, na qual o próximo estado de cada célula depende de seu próprio estado e de suas células vizinhas. Em um determinado passo, a configuração do reticulado é representada por  $C$ , em que  $C \in S^{Z^d}$  (KARI, 2005).

A posição de uma célula no reticulado é representada por um vetor  $\vec{n}$  e o estado da célula é dado pela função  $c : \vec{n} \rightarrow S$ . Dado que a posição da primeira célula da Figura 2a é 0, então a posição da última célula é  $\vec{n} = (14)$ ; a posição da primeira célula da Figura 2b é  $\vec{n} = (0, 0)$  e a posição da última célula é  $\vec{n} = (7, 7)$ . Os estados das células são  $c(14) = 1$  e  $c((0, 0)) = 0$ . A vizinhança de uma célula é definida genericamente pelo conjunto  $N$  que contém as posições relativas das células vizinhas de  $c(\vec{n})$ . Para as Figuras 2a e 2b pode-se definir os seus respectivos conjuntos  $N$ , ilustrados na Figura 3.

$$\begin{array}{cc}
N = \{ -1, 0, 1 \} & N = \left\{ \begin{array}{ccc} (-1, -1), & (-1, 0), & (-1, 1), \\ (0, -1), & (0, 0), & (0, 1), \\ (1, -1), & (1, 0), & (1, 1) \end{array} \right\} \\
\text{(a) Unidimensional.} & \text{(b) Bidimensional.}
\end{array}$$

Figura 3: Vizinhança definida por  $N$ , reticulados unidimensional e bidimensional.

Ao realizar a combinação linear entre o conjunto  $N$  e a posição  $\vec{n}$  de uma célula, obtém-se a posição das células vizinhas de  $c$ .

$$(\vec{n} + \vec{n}_0, \vec{n} + \vec{n}_1, \dots, \vec{n} + \vec{n}_{m-1}), \text{ em que } \vec{n}, \vec{n}_i \in Z^d, i = 0 \dots m - 1, m = |N|.$$

As posições das células vizinhas de  $c$  na posição  $\vec{n} = (3)$  com  $N = \{-1, 0, 1\}$  da Figura 2a são  $\{2, 3, 4\}$ . Os estados das células vizinhas a  $c(\vec{n})$  são obtidos por meio da função  $N_S$ .

$$N_S(\vec{n}) = \{c(\vec{n} + \vec{n}_0), c(\vec{n} + \vec{n}_1), \dots, c(\vec{n} + \vec{n}_{m-1})\}, \text{ em que } N_S \in S^m.$$

A função de transição de estados  $f$  recebe como parâmetro os estados das células vizinhas de  $c(\vec{n})$  e retorna o novo estado de  $c$ , ou seja  $f : N_S(\vec{n}) \rightarrow S$ . Ao aplicar  $f$  para todas as configurações possíveis de vizinhança é definida uma regra de um autômato celular. Abaixo exemplifica-se uma regra para  $S = \{0, 1\}$  e  $N = \{-1, 0, 1\}$ .

$$\begin{array}{cccc}
f(111) = 1 & f(101) = 1 & f(011) = 1 & f(001) = 1 \\
f(110) = 1 & f(100) = 1 & f(010) = 1 & f(000) = 1
\end{array}$$

Ao aplicar a regra local em todas as células do reticulado, tem-se a função de transição de estados global associada (KARI, 2005).

$$F : C^t \rightarrow C^{t+1}, \text{ em que } C \in S^{Z^d}$$

### 2.1.1 Autômatos Celulares Elementares

Os autômatos celulares elementares possuem reticulado finito ou infinito unidimensional, conjunto de estados  $S = \{0, 1\}$ , e vizinhança  $N = \{-1, 0, 1\}$ . Como existem  $2^m = 2^3 = 8$  vizinhanças possíveis, e cada uma pode levar a um estado 0 ou 1, então existem  $2^8 = 256$  regras possíveis, que definem o espaço elementar de autômatos celulares (Figura 4) (WOLFRAM, 2002).

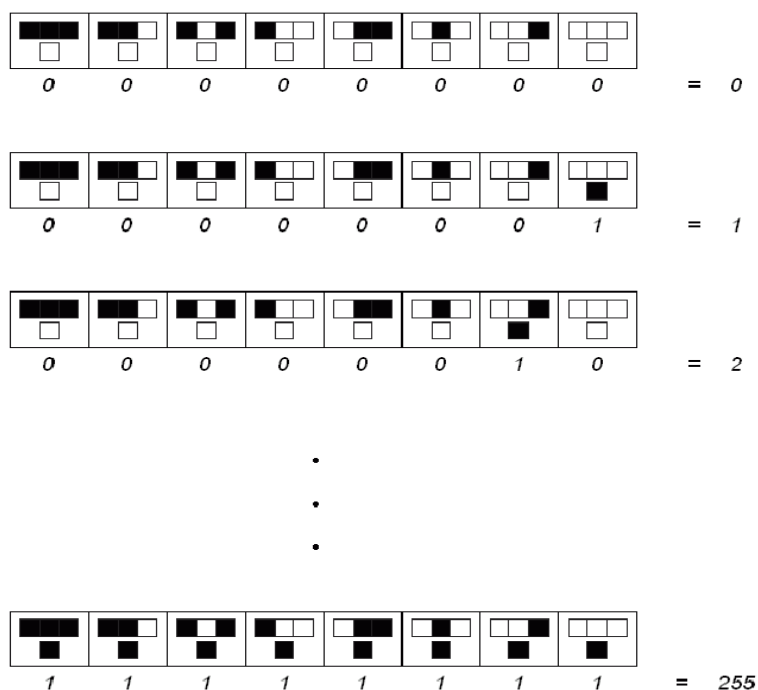


Figura 4: Espaço elementar de regras (WOLFRAM, 2002).

Cada regra pode ser representada por um número inteiro  $R$  decorrente da conversão dos bits de saída de cada vizinhança que estão em ordem lexicográfica, por exemplo, a regra 2 da Figura 4 é obtida por meio de  $R = 2^7 \cdot 0 + 2^6 \cdot 0 + 2^5 \cdot 0 + 2^4 \cdot 0 + 2^3 \cdot 0 + 2^2 \cdot 0 + 2^1 \cdot 1 + 2^0 \cdot 0 = 2$ .

A configuração de um AC unidimensional pode ser disposta na forma de um array. O autômato celular ilustrado na Figura 2a também pode ser escrito na forma de uma cadeia de símbolos pertencentes ao conjunto  $S$ ; a Figura 5 ilustra uma configuração  $C$  de tamanho  $L$  de um AC unidimensional.

$$C = \overbrace{\{0, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1\}}^L$$

Figura 5: Representação do reticulado de tamanho  $L$ , com os estados do conjunto  $S$ .

Para reticulados unidimensionais é comum utilizar o raio de uma célula para definir o tamanho  $m$  da vizinhança. O raio é representado por  $r$ , e o tamanho da vizinhança  $m$  é definido por  $m = 2r + 1$ . A Figura 7 representa uma vizinhança de raio 2 (JERAS; DOBNIKAR, 2007).

$$C = \overbrace{\{0, 1, 0, 1, 1, \underbrace{1, 0, 1}_{r}, \underbrace{1, 0, 1}_{r}, 1, 0, 0, 1, 1\}}^L$$

$m=2r+1$

Figura 6: Vizinhança de uma célula.

Com vizinhanças não simétricas, o tamanho da vizinhança  $m$  é dado por  $m = \lceil 2r+1 \rceil$ . Os exemplos a seguir são vizinhanças de raios de 1,5 e 2,5 respectivamente.

$$C = \overbrace{\{0, 1, 0, 1, 1, \underbrace{1, 0, 1}_{r}, \underbrace{1}_{r}, 0, 1, 0, 0, 1, 1\}}^L$$

$m = 4$

$$C = \overbrace{\{0, 1, 0, 1, 1, \underbrace{1, 0, 1}_{r}, \underbrace{1, 0, 1}_{r}, 1, 0, 0, 1, 1\}}^L$$

$m = 6$

Figura 7: Vizinhança não simétrica de uma célula.

Para as células pertencentes aos extremos  $c(0)$  e  $c(L - 1)$ , é necessário definir suas células vizinhas já que a célula  $c(0)$  não possui células vizinhas à sua esquerda e a célula  $c(L - 1)$  não possui células vizinhas à sua direita. Para as vizinhanças destas células define-se a condição de contorno a elas associada, a qual usualmente é fixa ou cíclica. A condição de contorno fixa define uma célula com estado fixo para as células no extremo do

reticulado. A condição de contorno cíclica define as células do lado oposto do reticulado para compor a vizinhança; os reticulados que possuem condição de contorno cíclica são chamados de reticulados cíclicos. Dado o reticulado representado na Figura 5, temos as seguintes configurações possíveis de condição de contorno para  $r = 1$ .

1. Condição de contorno fixa:

$$1, c(0), c(1), \dots, c(L-1), 1 \text{ ou}$$

$$0, c(0), c(1), \dots, c(L-1), 0 \text{ ou}$$

$$1, c(0), c(1), \dots, c(L-1), 0 \text{ ou}$$

$$0, c(0), c(1), \dots, c(L-1), 1$$

2. Condição de contorno cíclica:

$$c(L-1), c(0), c(1), \dots, c(L-1), c(0)$$

A evolução temporal de um autômato celular unidimensional pode ser representada e melhor visualizada por uma matriz de dimensão  $t \times L$ , na qual  $t$  é o número de passos em que o autômato celular foi executado. A Figura 1 representa a evolução temporal da regra 30 com 28 passos em um reticulado unidimensional com uma única célula no estado 1 na condição inicial, conjunto de estados  $S = \{0, 1\}$ , raio  $r = 1$ , e condição de contorno cíclica (KARI, 2005).

### 2.1.2 Equivalência dinâmica no espaço elementar

Nos ACs existem regras que são equivalentes entre si, ou seja, possuem o mesmo comportamento dinâmico. No caso dos ACs binários ( $S = \{0, 1\}$ ), existem três operações para se obter regras equivalentes: Conjugação, Reflexão e Conjugação-Reflexão, esta última representando uma das operações anteriores seguida da outra, ou seja, a composição das operações individuais. As operações são aplicadas nas transições de estado de uma regra (WOLFRAM, 2002). A Tabela 1 ilustra a operação de conjugação.

Regra 2	Vizinhança	111	110	101	100	011	010	001	000
	Próximo estado	0	0	0	0	0	0	1	0
	Conjugação	000	001	010	011	100	101	110	111
	Próximo estado	1	1	1	1	1	1	0	1
Regra 191	Reordenado	111	110	101	100	011	010	001	000
	Próximo estado	1	0	1	1	1	1	1	1

Tabela 1: Conjugação da regra 2.

A operação de conjugação ilustrada na Tabela 1 troca os bits de 0 para 1 e de 1 para 0 de cada vizinhança e dos seus respectivos próximos estados; a vizinhança 001 que leva ao estado 1, após a operação de conjugação se torna a vizinhança 110 que leva ao estado 0. Após a operação de conjugação ser aplicada em todas as vizinhanças, as mesmas são ordenadas lexicograficamente obtendo-se a regra 191. A Tabela 2 ilustra a operação de reflexão.

Regra 2	Vizinhança	111	110	101	100	011	010	001	000
	Próximo estado	0	0	0	0	0	0	1	0
	Reflexão	111	011	101	001	110	010	100	000
	Próximo estado	0	0	0	0	0	0	1	0
Regra 16	Reordenado	111	110	101	100	011	010	001	000
	Próximo estado	0	0	0	1	0	0	0	0

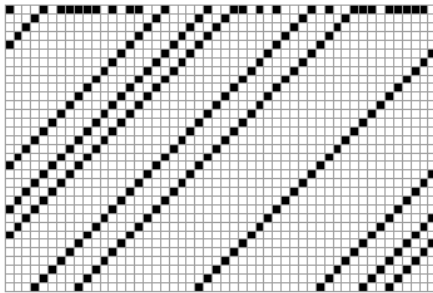
Tabela 2: Reflexão da regra 2.

A operação de reflexão ilustrada na Tabela 2 inverte as vizinhanças sem alterar seus respectivos próximos estados; a vizinhança 001 que leva ao estado 1, após a operação de reflexão se torna a vizinhança 100 que continua levando ao estado 1; após a operação de reflexão ser aplicada em todas as vizinhanças, as mesmas são ordenadas lexicograficamente obtendo-se a regra 16. A operação de conjugação-reflexão consiste em aplicar a operação de conjugação seguida da operação de reflexão (ou vice-versa); conforme ilustrado na Tabela 3.

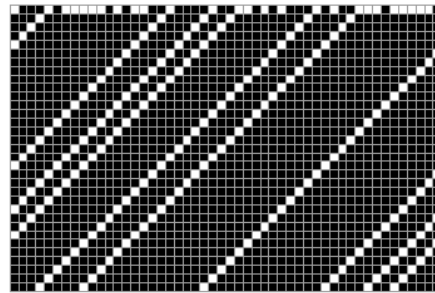
Regra 2	Vizinhança	111	110	101	100	011	010	001	000
	Próximo estado	0	0	0	0	0	0	1	0
	Conjugação	000	001	010	011	100	101	110	111
	Próximo estado	1	1	1	1	1	1	0	1
	Reflexão	000	100	010	110	001	101	011	111
	Próximo estado	1	1	1	1	1	1	0	1
Regra 247	Reordenado	111	110	101	100	011	010	001	000
	Próximo estado	1	1	1	1	0	1	1	1

Tabela 3: Conjugação-Reflexão da regra 2.

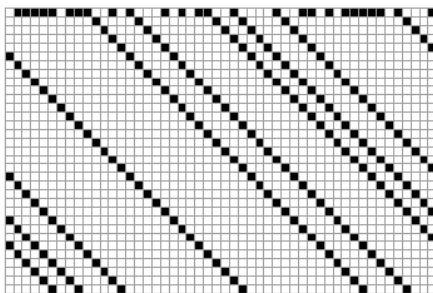
Para exemplificar que as regras 2, 16, 191 e 247 possuem o mesmo comportamento dinâmico basta executar cada regra com a mesma condição inicial. A Figura 8 ilustra o comportamento dinâmico equivalente das regra 2, 16, 191 e 247.



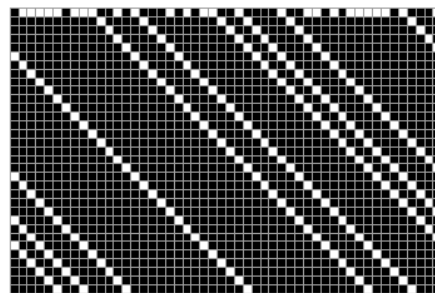
(a) Regra 2.



(b) Regra 191 (conjugação).



(c) Regra 16 (reflexão).



(d) Regra 247 (conjugação-reflexão).

Figura 8: Evolução temporal das equivalentes dinâmicas da regra 2.

A regra 191 ilustrada na Figura 8b é o negativo da regra 2, a regra 16 ilustrada na



Figura 8c é o espelho da regra 2, e a regra 247 ilustrada na Figura 8d é o espelho-negativo da regra 2.

Ao aplicar as três operações em cada regra no espaço elementar obtém-se 88 classes de regras equivalentes dinâmicas. Para cada classe pode-se definir uma representante, usualmente, a regra com o menor número. A Tabela 4 apresenta as classes de equivalência dinâmica do espaço elementar (WOLFRAM, 2002).

Classes de Equivalência Dinâmica			
{0, 255}	{26, 82, 167, 181}	{56, 98, 185, 227}	{132, 222}
{1, 127}	{27, 39, 53, 83}	{57, 99}	{134, 148, 158, 214}
{2, 16, 191, 247}	{28, 70, 157, 199}	{58, 114, 163, 177}	{136, 192, 238, 252}
{3, 17, 63, 119}	{29, 71}	{60, 102, 153, 195}	{138, 174, 208, 244}
{4, 223}	{30, 86, 135, 149}	{62, 118, 131, 145}	{140, 196, 206, 220}
{5, 95}	{32, 251}	{72, 237}	{142, 212}
{6, 20, 159, 215}	{33, 123}	{73, 109}	{146, 182}
{7, 21, 31, 87}	{34, 48, 187, 243}	{74, 88, 173, 229}	{150}
{8, 64, 239, 253}	{35, 49, 59, 115}	{76, 205}	{152, 188, 194, 230}
{9, 65, 111, 125}	{36, 219}	{77}	{154, 166, 180, 210}
{10, 80, 175, 245}	{37, 91}	{78, 92, 141, 197}	{156, 198}
{11, 47, 81, 117}	{38, 52, 155, 211}	{90, 165}	{160, 250}
{12, 68, 207, 221}	{40, 96, 235, 249}	{94, 133}	{162, 176, 186, 242}
{13, 69, 79, 93}	{41, 97, 107, 121}	{104, 233}	{164, 218}
{14, 84, 143, 213}	{42, 112, 171, 241}	{105}	{168, 224, 234, 248}
{15, 85}	{43, 113}	{106, 120, 169, 225}	{170, 240}
{18, 183}	{44, 100, 203, 217}	{108, 201}	{172, 202, 216, 228}
{19, 55}	{45, 75, 89, 101}	{110, 124, 137, 193}	{178}
{22, 151}	{46, 116, 139, 209}	{122, 161}	{184, 226}
{23}	{50, 179}	{126, 129}	{200, 236}
{24, 66, 189, 231}	{51}	{128, 254}	{204}
{25, 61, 67, 103}	{54, 147}	{130, 144, 190, 246}	{232}

Tabela 4: Classes de equivalência dinâmica do espaço elementar.

## 2.2 Reversibilidade de regras

Pré-imagens em autômatos celulares são todas as possíveis configurações anteriores de um reticulado no passo  $t - 1$  que levam à configuração no passo  $t$ . Para uma regra ser

reversível todas as configurações possíveis de um reticulado podem possuir somente uma pré-imagem (POWLEY, 2009).

Configurações que não possuam pré-imagens são definidas como *Garden of Eden* ou *GoE*. Caso uma regra possua pelo menos uma configuração do tipo *GoE* consequentemente a regra também possui alguma configuração que tem mais de uma pré-imagem; logo, a regra não é reversível (POWLEY, 2009).

Autômatos celulares reversíveis são exceções, pois a maioria dos autômatos celulares possuem alguma configuração que seja *Garden of Eden*. Na família de autômatos celulares elementares somente as regras 15, 85, 51, 170, 240 e 204 são reversíveis. A Figura 9 ilustra o comportamento destas regras, na qual a primeira linha de cada figura é o passo  $t = 0$  e a última linha é o passo  $t = 49$ .

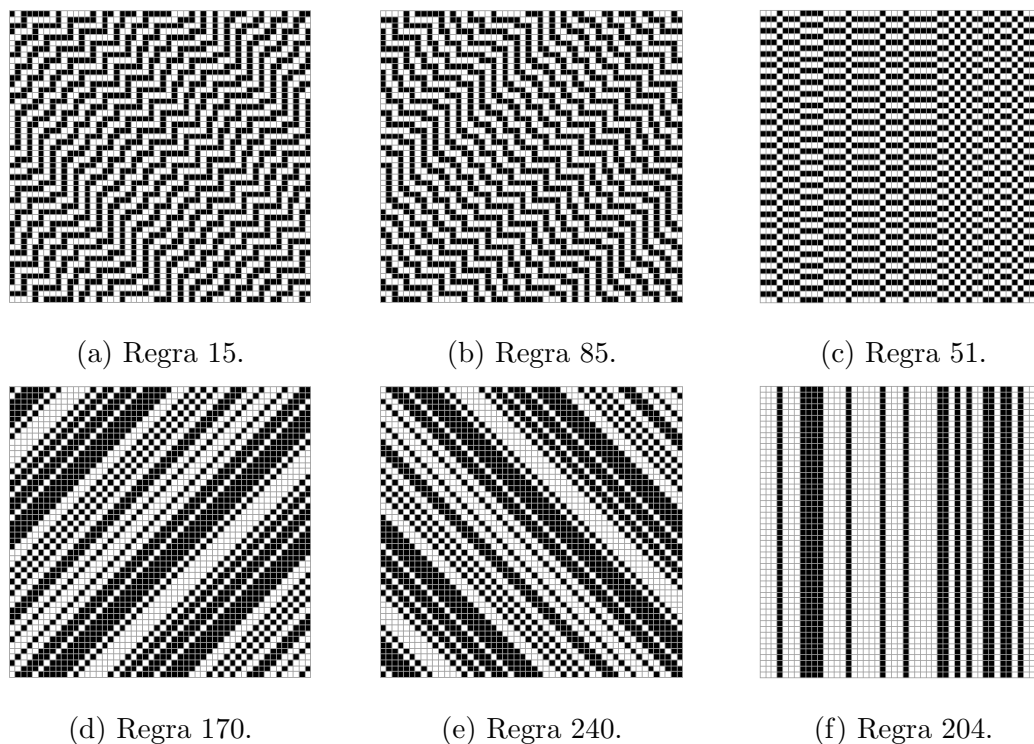


Figura 9: Regras reversíveis.

A regra 15 troca o estado da célula de 0 para 1 e desloca o resultado das transições de estado para a direita; a regra 85 troca o estado da célula de 1 para 0 e desloca o resultado das transições de estado para a esquerda; a regra 51 troca os estados de 0 para 1 e de 1

para 0, independente da vizinhança; a regra 170 desloca o reticulado para a esquerda; a regra 240 desloca o reticulado para a direita; e a regra 204 mantém o estado da célula independente da vizinhança.

O diagrama de estados de uma regra é útil para visualizar que uma regra é reversível ou não (WOLFRAM, 2002). A Figura 10 ilustra o diagrama de estados da regra 15 para  $L = 5$  com reticulado cíclico.

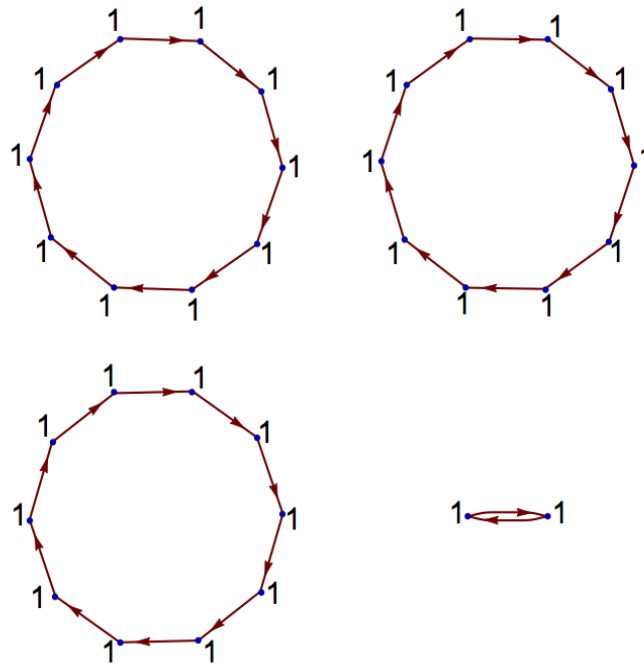


Figura 10: Diagrama de estados da regra 15 para  $L = 5$ .

O diagrama de estado representado na Figura 10 é um grafo dirigido, no qual cada vértice é uma possível configuração de reticulado e os números indicam a quantidade de configurações antecessoras. Com  $L = 5$ , temos  $2^5 = 32$  configurações possíveis, ou seja, o grafo possui 32 vértices. A regra 15 representada na Figura 10 possui todos os vértices com somente um antecessor, significando que a regra 15 possui todas as configurações possíveis de reticulado com somente uma única pré-imagem, ou seja a regra 15 é reversível em reticulado de tamanho  $L = 5$ .

Algumas regras dos ACs são reversíveis somente para tamanhos específicos de reti-

culados; por exemplo, a regra 150 é reversível se e somente se  $L$  não for múltiplo de 3 (POWLEY, 2009). A Figura 11 ilustra o diagrama de estados da regra 150 para reticulado de tamanhos iguais a 4 e 3.

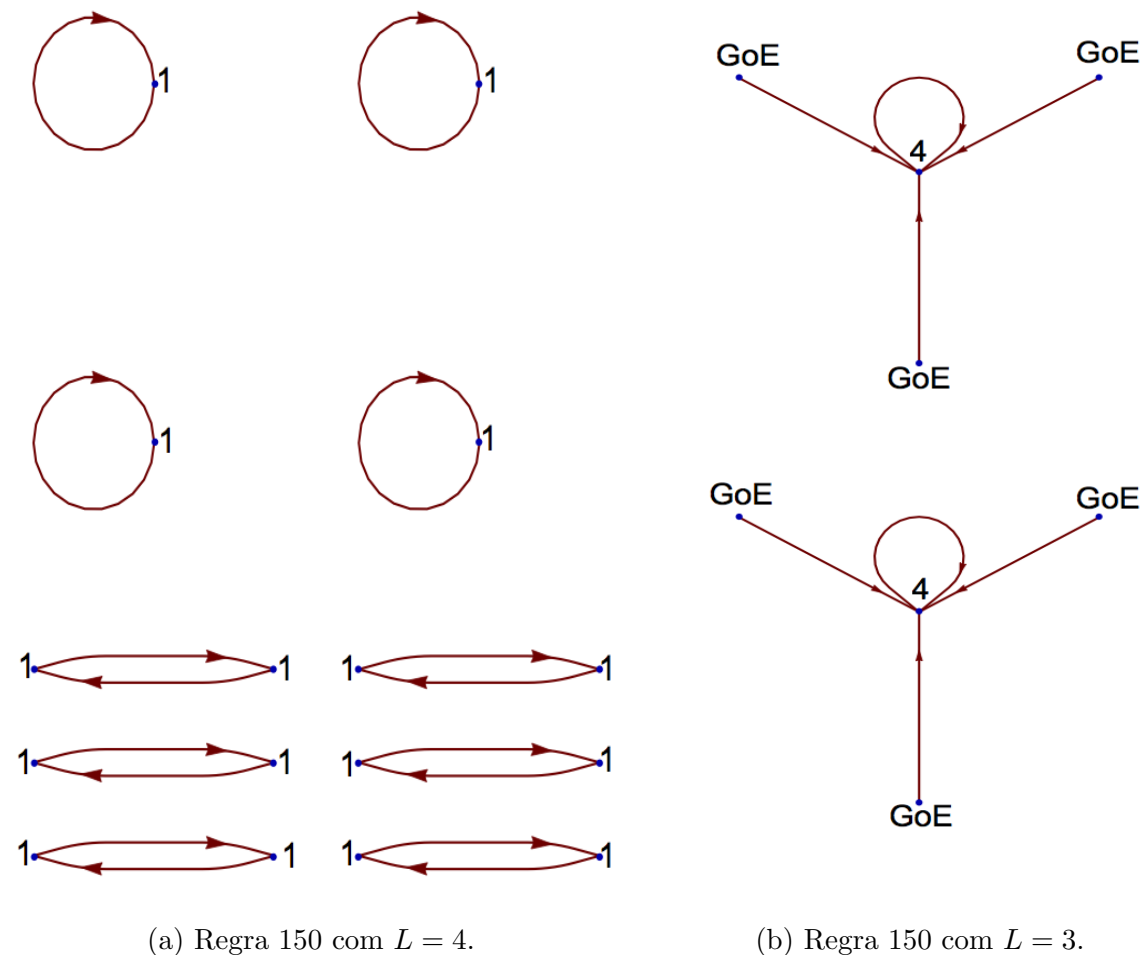


Figura 11: Diagrama de estados da regra 150.

Na Figura 11a a regra 150 não possui configurações do tipo  $GoE$ , já que cada configuração possível possui apenas 1 pré imagem; logo ela é reversível para este tamanho de reticulado. Na Figura 11b, como existem configurações de reticulado que são do tipo  $GoE$  e existem configurações que possuem mais que 1 pré-imagem, ela não é reversível para este tamanho de reticulado.

Em Inokuchi (2007) observou-se que, além da regra 150, existem outras regras no espaço elementar que são reversíveis para determinados tamanhos de reticulado e condições de contorno. A Tabela 5 resume as regras que são reversíveis de acordo com as condições

de contorno e tamanhos específicos de reticulados. Observe-se que, além dos dados apresentados para condição de contorno cíclica, outras condições também são consideradas, conforme as seguintes representações:  $s_0 - s_1$  para contorno fixo;  $s_0 - *$  para contorno fixo somente para a célula na extrema esquerda do reticulado;  $* - s_1$  para contorno fixo somente para a célula na extrema direita do reticulado; e  $* - *$  para contorno livre, em que repetem-se as células localizadas em ambos os extremos do reticulado,  $c(0), c(0), \dots, c(L), c(L)$ .  $\mathcal{R}$  indica que a regra é reversível para qualquer tamanho de reticulado unidimensional,  $\mathcal{R}_1$  reversível se e somente se  $L \bmod 2 = 0$ ,  $\mathcal{R}_2$  reversível se e somente se  $L \bmod 3 \neq 2$ ,  $\mathcal{R}_3$  reversível se e somente se  $L \bmod 3 \neq 1$ ,  $\mathcal{R}_4$  reversível se e somente se  $L \bmod 3 \neq 0$ , e  $\mathcal{R}_5$  reversível se e somente se  $L \bmod 2 = 1$ .

Regras	$s_0 - s_1$	$s_0 - *$	$* - s_1$	$* - *$	cíclico
51, 204	$\mathcal{R}$	$\mathcal{R}$	$\mathcal{R}$	$\mathcal{R}$	$\mathcal{R}$
15, 85, 170, 240	não $\mathcal{R}$	não $\mathcal{R}$	não $\mathcal{R}$	não $\mathcal{R}$	$\mathcal{R}$
90, 165	$\mathcal{R}_1$	$\mathcal{R}$	$\mathcal{R}$	não $\mathcal{R}$	não $\mathcal{R}$
60, 195	$\mathcal{R}$	$\mathcal{R}$	não $\mathcal{R}$	não $\mathcal{R}$	não $\mathcal{R}$
102, 153	$\mathcal{R}$	não $\mathcal{R}$	$\mathcal{R}$	não $\mathcal{R}$	não $\mathcal{R}$
150, 105	$\mathcal{R}_2$	$\mathcal{R}_3$	$\mathcal{R}_3$	$\mathcal{R}_4$	$\mathcal{R}_4$
166, 188, 154, 210, 89, 75, 101, 45	não $\mathcal{R}$	não $\mathcal{R}$	não $\mathcal{R}$	não $\mathcal{R}$	$\mathcal{R}_5$
demais regras	não $\mathcal{R}$	não $\mathcal{R}$	não $\mathcal{R}$	não $\mathcal{R}$	não $\mathcal{R}$

Tabela 5: Condições especiais de reversibilidade no espaço elementar. Fonte: (INOKUCHI, 2007, pág. 31).

## 2.3 Grafos de De Bruijn

Grafos de De Bruijn são uma forma de representar um AC unidimensional qualquer na forma de um grafo. Eles são construídos a partir da descrição de como uma cadeia de símbolos de tamanho  $e$  de um determinado alfabeto de tamanho  $k$  podem ser sobrepostos (*overlapped*). Os nós do grafo são as combinações possíveis sobre os elementos do alfabeto e as arestas denotam como ocorrem os *overlaps* (MCINTOSH, 1991).

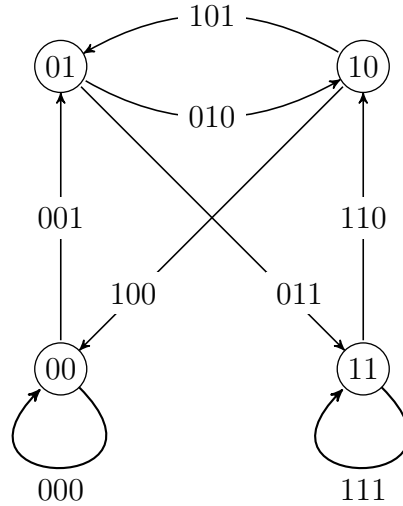


Figura 12: Grafo de De Bruijn  $(k, e) = (2, 2)$  (MCINTOSH, 1991).

Um *overlap* é válido se cadeias de símbolos  $A$  e  $B$  de tamanho  $e$  possuírem  $A[1, \dots, e-1] = B[0, \dots, e-2]$  ou  $A[0, \dots, e-2] = B[1, \dots, e-1]$ ; dois exemplos de *overlaps* são descritos abaixo:

1.  $k = 2, e = 2$ :

$$\left. \begin{array}{l} A = [1, 1], \quad A[1, \dots, e-1] = 1 \\ B = [1, 0], \quad B[0, \dots, e-2] = 1 \end{array} \right\} A[1] = B[0], \text{ overlap} = \underbrace{[1, 1, 0]}_{B}^A$$

2.  $k = 2, e = 3$ :

$$\left. \begin{array}{l} A = [1, 1, 0], \quad A[1, \dots, e-1] = [1, 0] \\ B = [1, 0, 0], \quad B[0, \dots, e-2] = [1, 0] \end{array} \right\} A[1, \dots, 2] = B[0, \dots, 1], \text{ overlap} = \underbrace{[1, 1, 0, 0]}_{B}^A$$

Grafos de De Bruijn são utilizados em AC para representar a relação entre a vizinhança de uma célula e o próximo estado de uma célula ( $f : N_S(\vec{n}) \rightarrow c(\vec{n})$ ), ou seja são utilizados para representar regras dos ACs na forma de grafos. Os nós do grafo são todas as permutações possíveis de tamanho  $k$  sobre os estados do conjunto  $S$ ; nas arestas do grafo são omitidos os *overlaps* que representam as vizinhanças e apenas o próximo estado da célula é apresentado. Para autômatos celulares unidimensionais de raio  $r = 1$  o grafo genérico de De Bruijn  $(2,2)$  da Figura 12 pode representar as regras no espaço elementar

(MCINTOSH, 1991). Por exemplo, o grafo de De Bruijn da Figura 13 representa a regra 30 no espaço elementar (MCINTOSH, 1991).

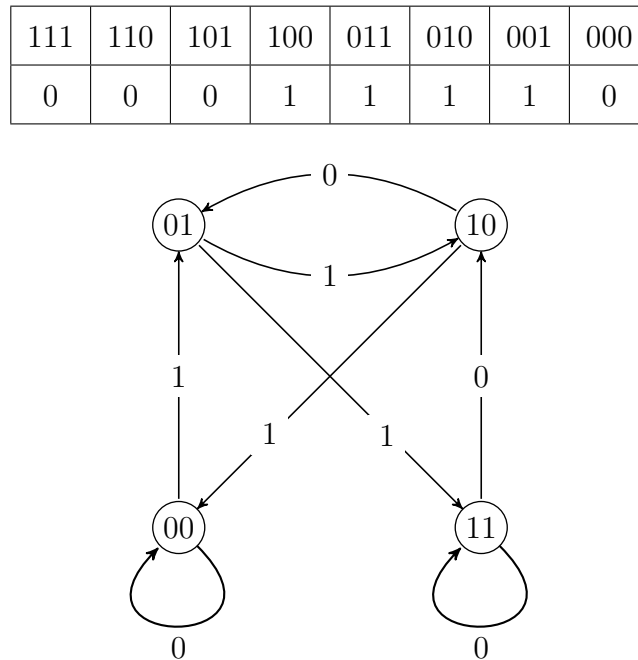


Figura 13: Grafo de De Bruijn Regra 30 no espaço elementar (MCINTOSH, 1991).

## 2.4 Contagem e Listagem de pré-imagens

O problema de contar pré-imagens de um AC unidimensional foi estudado na literatura por Jen (1989), Voorhees (1994) e McIntosh (1993). Jeras e Dobnikar (2007) descrevem dois algoritmos, um para obter a quantidade de pré-imagens (de McIntosh (1991)) e outro para listar as pré-imagens de uma configuração de um reticulado  $C$  cíclico ou fixo. Apesar de os algoritmos descritos terem como base algoritmos previamente desenvolvidos na literatura, em Jeras e Dobnikar (2007) apresenta-se uma forma modificada do grafo de De Bruijn. Como essa modificação contribui para análises feitas no Capítulo 4, o trabalho de Jeras e Dobnikar (2007) é descrito nesta Seção 2.4.

Para uma célula  $c$  estar em um estado no instante  $t$ , ela pode ter tido uma ou mais vizinhanças no instante  $t - 1$  que a levaram ao seu estado em  $t$ ; logo, cada vizinhança no instante  $t - 1$  é considerada uma pré-imagem da célula  $c$ . Uma célula em uma posição  $\vec{n}$ , em um determinado instante é dada por  $c(\vec{n})^t$ ; logo, a função de transição no instante

$t - 1$ , ou função de transição inversa local, é definida como

$$f^{-1} : c(\vec{n}) \longrightarrow N_S(\vec{n})^{t-1}, \text{ em que } N_S(\vec{n})^{t-1} \in S^m \text{ e } c(\vec{n}) \in S$$

e a função global inversa é definida como

$$F^{-1} : C^t \longrightarrow C^{t-1}, \text{ em que } C \in S^{Z^d}.$$

### 2.4.1 Grafo de De Bruijn modificado

Para representar as vizinhanças que levam uma célula estar no estado  $c(\vec{n})^t$ , Jeras e Dobnikar (2007) definem uma variante do grafo de De Bruijn, chamada de Grafo de De Bruijn modificado (GDBm) ou  $GDBm^R$ , em que  $R$  é o número da regra. Nesta seção será utilizada a regra elementar 110 como exemplo.

$N_S(\vec{n})^{t-1}$	111	110	101	100	011	010	001	000
$f : N_S(\vec{n})^{t-1} \rightarrow c(\vec{n})^t$	0	1	1	0	1	1	1	0

Tabela 6: Regra elementar 110 ( $r = 1$  e  $S = \{0, 1\}$ ).

Para construir o GDBm os nós que representam todas as permutações possíveis de tamanho  $k$  do conjunto  $S$  são organizadas em duas colunas, conforme ilustrado na Figura 14.

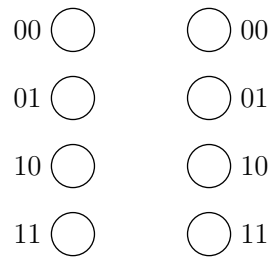


Figura 14: Vértices do grafo de De Bruijn modificado.

Os vértices da esquerda da Figura 14 são representados por  $o_s^{t-1}$  ( $s$ : *source*) e os vértices da direita por  $o_d^{t-1}$  ( $d$ : *drain*). A indicação do passo anterior  $t - 1$  na notação



de  $o_s$  e  $o_d$ , é devido às vizinhanças formadas pertencerem ao instante  $t - 1$ , ou seja  $f : N_S(\vec{n})^{t-1} \rightarrow c(\vec{n})^t$ . O próximo passo é conectar os vértices que formam um *overlap* válido, ou seja conectar os vértices com as vizinhanças da regra. A Figura 15 ilustra as vizinhanças no grafo de De Bruijn da regra 110 (JERAS; DOBNIKAR, 2007).

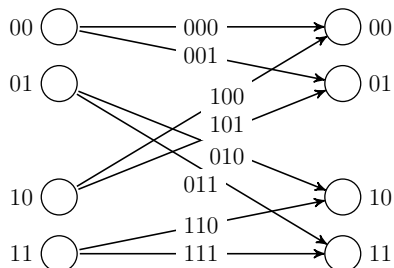


Figura 15: Vizinhanças da regra 110 no grafo de De Bruijn.

A próxima etapa da adaptação consiste em substituir as vizinhanças das arestas pelos seus respectivos estados, obtidos por meio da função de transição  $f(N_S(\vec{n})^{t-1}) = c(\vec{n})^t$ ; a Figura 16 ilustra o resultado desta etapa.

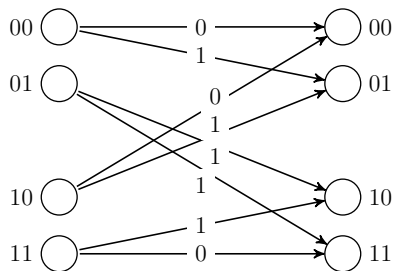


Figura 16: Substituição das vizinhanças pelos próximos estados.

A última etapa consiste em decompor o grafo da Figura 16 para cada estado do conjunto  $S = \{0, 1\}$ . Os grafos obtidos para cada transição de estado são representados por  $D^{(R)}(s_i)$ , em que  $R$  é número da regra e  $i = 0, 1, \dots, k - 1$ , conforme ilustra Figura 17.

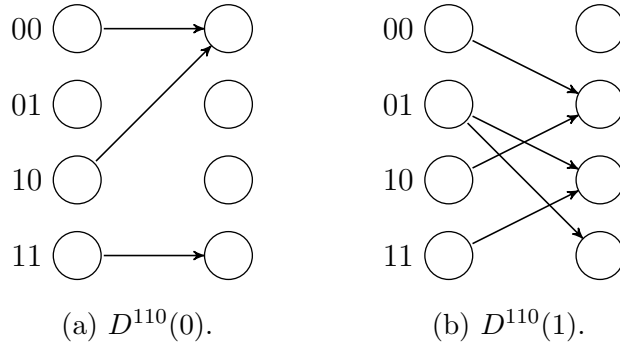


Figura 17: Grafo de De Bruijn modificado da regra 110.

Os grafos ilustrados na Figura 17 representam as vizinhanças no instante  $t - 1$  que levam uma célula  $c$  ao seu estado atual no instante  $t$ ; na Figura 17a as vizinhanças 000, 100 e 111 levam  $c$  ao estado 0, já as vizinhanças 001, 010, 011, 101 e 110 levam  $c$  ao estado 1. No algoritmo de listagem de pré-imagens os grafos  $D^R(s_i)$  são concatenados de acordo com  $c(\vec{n})$  formando um grafo representado por  $G_C$ ; a Figura 18 abaixo ilustra a representação do reticulado  $C = \{0, 0, 1, 1\}$ , com os vértices da extrema esquerda representados por  $o_E$  e os vértices da extrema direita por  $o_D$ .

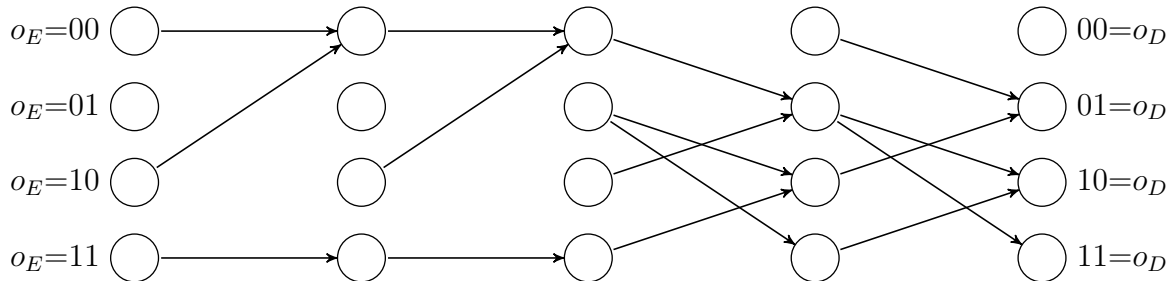


Figura 18: Grafo  $G_C$  para o reticulado  $C = \{0, 0, 1, 1\}$ .

Os GDBm's podem também ser representados na forma matricial, no caso, uma matriz quadrada de ordem  $k^{m-1} \times k^{m-1}$ , em que as linhas da matriz representam os *overlaps* da esquerda, as colunas representam os *overlaps* da direita, e um elemento da matriz representa  $d_{o_s, o_d}$ . Ou seja:

$$D_{adj}^{(R)}(s_i) = \begin{bmatrix} d_{0,0} & d_{0,1} & \dots \\ d_{1,0} & d_{o_s, o_d} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

$$o_s, o_d = 0, 1, 2, \dots, k^{m-1} - 1$$

$$d_{o_s, o_d}(s_i) = \begin{cases} 1 & \text{se existe uma aresta conectando } o_s \text{ e } o_d; \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Os grafos de De Bruijn representados nas Figuras 17a e 17b podem ser representados pelas matrizes abaixo, respectivamente:

$$D_{adj}^{(110)}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_{adj}^{(110)}(1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Com as definições apresentadas, torna-se possível calcular a quantidade de pré-imagens de um reticulado unidimensional com qualquer configuração, o que é demonstrado a seguir.

### 2.4.2 Contagem de pré-imagens em um reticulado

Ao estender a notação matricial  $D_{adj}$  de uma única célula para todas as células de um reticulado  $C$ , é possível obter a quantidade de pré-imagens de  $C$ . Para obter as pré-imagens de  $C$ , primeiramente é calculada a matriz  $D^{(R)}(C)$  por meio do produto de cada matriz  $D_{adj}(c(\vec{n}))$ .

$$D^{(R)}(C) = I_{k^{m-1}} \cdot \prod_{\vec{n}=0}^{L-1} D_{adj}^{(R)}(c(\vec{n})) = D_{adj}^{(R)}(c(0)) \cdot D_{adj}^{(R)}(c(1)) \dots D_{adj}^{(R)}(c(L-1))$$

Para obter as pré-imagens com condição de contorno fixa é utilizado o vetor de condição de contorno representado por  $b$ , de tamanho  $k^{m-1}$ , que contém valores 1 ou 0. Cada posição do vetor  $b$  indica se um nó  $o_E$  e  $o_D$  será considerado ou não para se

obter as pré-imagens: 1 indica que será considerado no cálculo das pré-imagens, e 0 caso contrário. O vetor  $b$  é definido para ambos os nós  $o_E$  e  $o_D$ :  $b_E$  para  $o_E$  e  $b_D$  para  $o_D$ :

$$b_E = [o_{E_0}, o_{E_1}, \dots, o_{E_i}]^T, \text{ em que } i = 0, 1, \dots, k^{m-1} - 1.$$

$$b_D = [o_{D_0}, o_{D_1}, \dots, o_{D_i}]^T, \text{ em que } i = 0, 1, \dots, k^{m-1} - 1.$$

$$b_E \text{ ou } b_D = \begin{cases} 1 & \text{se } o_L \text{ ou } o_D \text{ pode ser utilizado no cálculo das pré-imagens,} \\ 0 & \text{se } o_L \text{ ou } o_D \text{ não pode ser utilizado no cálculo das pré-imagens.} \end{cases}$$

Para se utilizar todos os nós é utilizado o vetor  $b$  sem restrições definido por  $b_u$ .

$$b_u = [1, 1, \dots, 1]^T$$

O número de pré-imagens  $p_c$  de um reticulado com condição de contorno cíclica é obtido pelo produto escalar entre a diagonal principal de  $D^{(R)}(C)$ , definida por  $d_p(D^{(R)}(C))$ , e o vetor de contorno sem restrição  $b_u$ :

$$d_p(D^{(R)}(C)) = [d_{0,0}, d_{1,1}, \dots, d_{k^m,k^m}]^T, \text{ em que } d \in D^{(R)}(C).$$

$$p_c = b_u^T \cdot d_p(D^{(R)}(C))$$

Para exemplificar o cálculo da quantidade pré-imagens considere um reticulado  $C = \{0, 0, 1, 1\}$  e a regra elementar 110, e abaixo a multiplicação das matrizes de adjacências de acordo com o estado das células do reticulado:

$$D^{(110)}(C) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para obter a quantidade de pré-imagens no reticulado  $C$  com condição de contorno cíclica é realizado o produto escalar entre o vetor de contorno  $b_u^T$  e a diagonal principal de  $d_p(D^{(R)}(C))$ , como exemplificado a seguir:

$$p_c = b_u^T \cdot d_p = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1$$

Para obter a quantidade de pré-imagens no reticulado  $C$  com condição de contorno fixa  $p_f$ , é realizado o produto escalar entre o vetor de contorno  $b_E^T$ ,  $D^{(R)}(C)$  e  $b_D$ . Abaixo o cálculo é exemplificado.

$$p_f = b_E^T \cdot D^{(R)}(C) \cdot b_D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 5$$

### 2.4.3 Listagem de pré-imagens

Ao estender a representação das regras por meio do GDBm, é possível listar as pré-imagens de uma configuração de reticulado  $C$ . O algoritmo consiste em interligar os GDBm's de cada célula do reticulado  $C$  formando um grafo  $G_C$ . Após criar o grafo  $G_C$  é feita uma busca em profundidade para listar as pré-imagens. Dado o reticulado unidimensional  $C = \{0, 0, 1, 1\}$  a Figura 18 ilustra o grafo  $G_C$ .

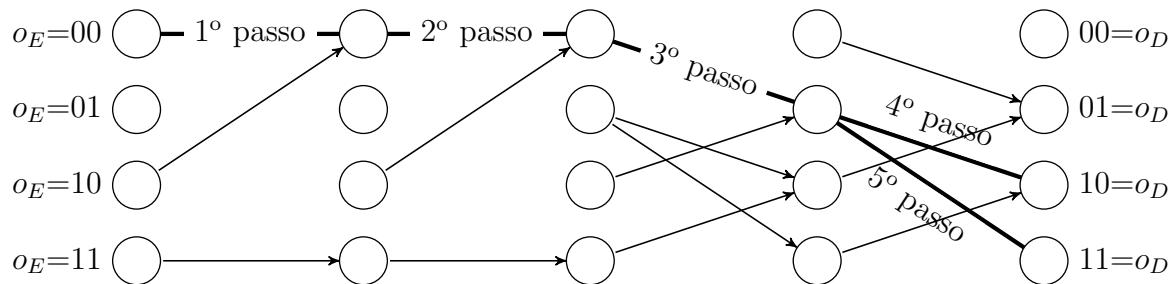
O algoritmo começa a realizar a busca a partir dos nós  $o_E$ , e para cada nó é realizada uma busca até os nós  $o_D$ . A cada iteração do processo de busca, ou seja, a cada nó visitado é armazenada a vizinhança criada pelo *overlap*  $o_x$  e  $o_{x+1}$ , em que  $o_x$  representa o *overlap* atual e  $o_{x+1}$  o próximo *overlap* adjacente. Para condição de contorno cíclica, uma pré-imagem válida tem que começar e terminar em um nó de mesmo valor, ou seja

$$o_E = o_D.$$

Abaixo demonstra-se o processo de busca de pré-imagens com condição de contorno fixa e cíclica; observe-se que para condição de contorno fixa as pré-imagens são  $\{0, 0, 0, 0, 1, 0\}$ ,  $\{0, 0, 0, 0, 1, 1\}$ ,  $\{1, 0, 0, 0, 1, 0\}$ ,  $\{1, 0, 0, 0, 1, 1\}$ , e  $\{1, 1, 1, 1, 0, 1\}$ , enquanto que no caso cíclico há apenas a pré-imagem  $\{0, 0, 0, 1\}$ .

PI/CP = pré-imagem com condição de contorno cíclica

PI/CF = pré-imagem com condição de contorno fixa



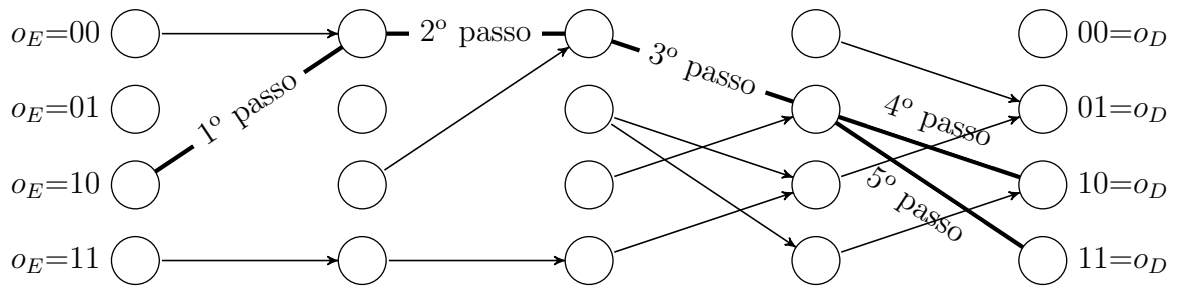
Passos	Vizinhanças					
	0	0	0			
1º	0	0	0			
2º		0	0	0		
3º			0	0	1	
4º				0	1	0
$o_E = 00$						
PI/CP		0	0	0	1	
PI/CF	0	0	0	0	1	0
5º				0	1	1
PI/CP		0	0	0	1	
PI/CF	0	0	0	0	1	1

$o_E \neq o_D$

$o_E \neq o_D$

Figura 19: Busca de pré-imagem, *overlap* inicial  $o_E = 00$ .

Na Figura 19 é iniciada a busca de pré-imagens a partir do vértice  $o_E = 00$  e existem dois caminhos possíveis até os vértices  $o_D$ ; são eles:  $o_E = 00 \rightarrow o_D = 10$  e  $o_E = 00 \rightarrow o_D = 11$ . Para condição de contorno cíclica as pré-imagens formadas não são válidas, porque  $o_L \neq o_R$ ; já para condição de contorno fixa, as pré-imagens  $\{0, 0, 0, 0, 1, 0\}$  e  $\{0, 0, 0, 0, 1, 1\}$  são válidas.

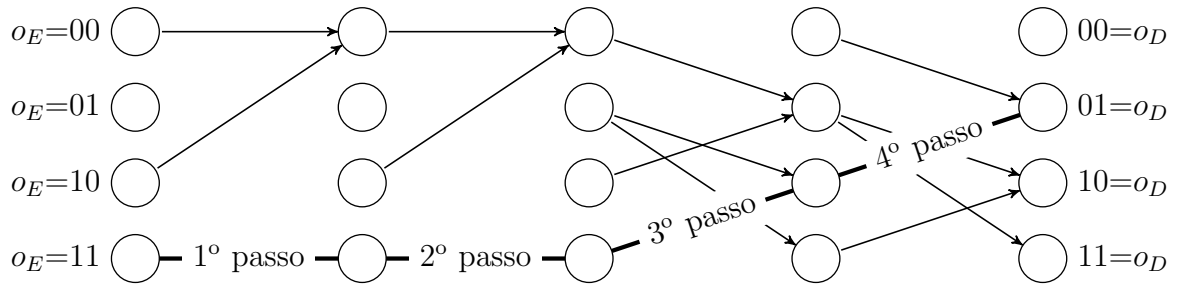


Passos	Vizinhanças					
1º	1	0	0			
2º		0	0	0		
3º			0	0	1	
4º				0	1	0
PI/CP		0	0	0	1	
PI/CF	1	0	0	0	1	0
5º				0	1	1
PI/CP		0	0	0	1	
PI/CF	1	0	0	0	1	1

$o_E = 10$        $o_E = o_D$

Figura 20: Busca de pré-imagem, overlap inicial  $o_E = 10$ .

A Figura 20 ilustra a busca de pré-imagem partindo do vértice  $o_E = 10$ ; existem dois caminhos possíveis até os vértices  $o_D$ :  $o_E = 10 \rightarrow o_D = 10$  e  $o_E = 10 \rightarrow o_D = 11$ . Para condição de contorno cíclica a pré-imagem  $\{0, 0, 0, 1\}$  formada pelo caminho  $o_E = 10 \rightarrow o_D = 10$  é válida devido a  $o_E = o_D$ ; já o caminho  $o_E = 10 \rightarrow o_D = 11$  não gera uma pré-imagem válida, já que  $o_E \neq o_D$ . Para condição de contorno fixa, as pré-imagens  $\{1, 0, 0, 0, 1, 0\}$  e  $\{1, 0, 0, 0, 1, 1\}$  formadas por ambos os caminhos são válidas.



Passos	Vizinhanças					
	1º	1	1	1		
2º		1	1	1		
3º			1	1	0	
4º				1	0	1
PI/CP		1	1	1	0	
PI/CF	1	1	1	1	0	1

$o_E \neq o_D$

Figura 21: Busca de pré-imagem, overlap inicial  $o_E = 11$ .

Na Figura 21 o próximo vértice a ser explorado é  $o_E = 11$  e existe um caminho possível até os vértices  $o_D$ :  $o_E = 11 \rightarrow o_E = 01$ . Para condição de contorno cíclica a pré-imagem formada não é válida porque  $o_E \neq o_D$ ; já para condição de contorno fixa a pré-imagem  $\{1, 1, 1, 1, 0, 1\}$  é válida.

## 2.5 Reversibilidade Parcial

Estendendo o conceito original de reversibilidade, em de Oliveira e Freitas (2010) foi introduzida a noção da *reversibilidade parcial*, que consiste em classificar regras que sejam mais ou menos reversíveis e agrupá-las caso possuam o mesmo *padrão de pré-imagem*. Um padrão de pré-imagem é um multiconjunto ordenado das quantidades de pré-imagens de todas as configurações possíveis de um reticulado, até um tamanho máximo de reticulado  $L_{max}$ .

A classificação é realizada por meio da comparação dos padrões de pré-imagens de cada regra que, quando comparados permitem definir uma noção apenas *relativa* de



reversibilidade parcial, ou seja, uma regra com relação a uma outra, sem referência ao valor da grandeza da regra em si. Na reversibilidade parcial relativa os conjuntos de regras mais reversíveis se encontram em um extremo, e as menos reversíveis no outro; tal classificação é obtida por meio da *ordenação lexicográfica* dos padrões de pré-imagens. Em de Oliveira e Freitas (2010) foram consideradas duas formas de visualizar os padrões de pré-imagens, lá denominadas de modelos direto e absoluto.

- Modelo direto:

$$\mathcal{P}_{dir}^{(R)} = \{z_1, z_2, \dots, z_j\} \begin{cases} j = 1, 2, \dots, L_{max}; \\ z_j \text{ é um submulticonjunto ordenado} \\ \text{das quantidades de pré-imagens.} \end{cases} \quad (1)$$

- Modelo absoluto:

$$\mathcal{P}_{abs}^{(R)} = \cup z_j = \{l_1, l_2, \dots, l_i\} \begin{cases} z_j \in \mathcal{P}_{dir}^{(R)}; \\ i = 1, 2, \dots, |\mathcal{P}_{dir}^{(R)}|; \\ l_i \in \mathcal{P}_{abs}^{(R)}. \end{cases} \quad (2)$$

No modelo direto o padrão de pré-imagem é separado em submulticonjuntos que contêm as quantidades de pré-imagens, e cada submulticonjunto corresponde a um tamanho de reticulado; já o modelo absoluto é a união de todos os submulticonjuntos do modelo direto, formando um único multiconjunto com todas as quantidades de pré-imagens. Em ambos os modelos o cálculo é realizado de  $L = 1$  até  $L_{max}$ , para cada configuração de tamanho  $L$  é executado o algoritmo descrito por McIntosh (1991); somente as configurações que não forem *GoE* são incluídas no padrão de pré-imagem, ou seja valores maiores que 0. Por exemplo, dada a regra elementar 3 e  $L_{max} = 5$ , os dois modelos resultam em:



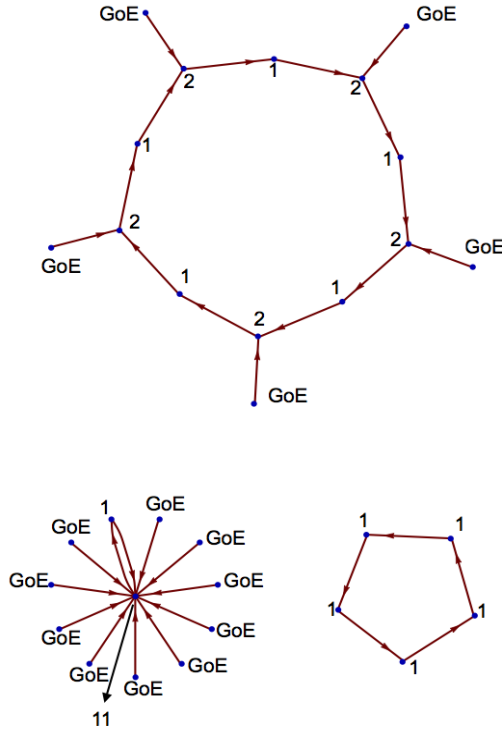


Figura 22: Diagrama de estados da regra elementar 3. para  $L = 5$ .

No modelo direto, a quantidade máxima de pré-imagens que um submulticonjunto  $z_j \in \mathcal{P}_{dir}^{(R)}$  pode possuir é igual à quantidade de configurações possíveis para o tamanho de reticulado em questão, ou seja  $|S|^L$ ; já no modelo absoluto, que se define pela união de todos os submulticonjuntos pertencentes ao modelo direto, a quantidade máxima de pré-imagens é dada pela somatória de  $|S|^L$  até  $L_{max}$ .

$$qtd_{max}(L_{max}) = \sum_{q=1}^{L_{max}} |S|^q = -2 + 2^{L_{max}+1} \quad (3)$$

Em de Oliveira e Freitas (2010) a ordenação lexicográfica dos padrões de pré-imagens foi proposta como forma para estudar a reversibilidade parcial relativa entre as regras elementares, o que permitiu agrupar aquelas que possuam o mesmo padrão de pré-imagem em classes de equivalência, aqui referidas como *Classes de Reversibilidade Parcial* ou PRC (*Partial Reversibility Classes*).

Na ordenação lexicográfica é importante que as quantidades de pré-imagens em ambos os modelos estejam em ordem crescente, caso contrário a ordenação lexicográfica não classifica corretamente as regras. O exemplo abaixo mostra os padrões de pré-imagem para os modelos direto e absoluto das regras 0, 11, 27 e 15, para  $L_{max} = 4$ , ordenados lexicograficamente:

- Modelo direto:

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{dir}^{(0)} &= \{\{16\}, \{8\}, \{4\}, \{2\}\} \\
\mathcal{P}_{dir}^{(11)} &= \{\{1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3\}, \{1, 1, 2, 2, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 1\}\} \\
\mathcal{P}_{dir}^{(27)} &= \{\{1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3\}, \{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}, \{1, 3\}, \{1, 1\}\} \\
\mathcal{P}_{dir}^{(15)} &= \{\{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}, \{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}, \\
&\quad \{1, 1, 1, 1\}, \{1, 1\}\}
\end{aligned}$$

- Modelo absoluto:

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{abs}^{(0)} &= \{2, 4, 8, 16\} \\
\mathcal{P}_{abs}^{(11)} &= \{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3\} \\
\mathcal{P}_{abs}^{(27)} &= \{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3\} \\
\mathcal{P}_{abs}^{(15)} &= \{1, 1\}
\end{aligned}$$

No modelo direto acima não fica evidente que a regra 27 é mais reversível que as regras 11 e 0, já que a regra 27 possui mais configurações com uma única pré-imagem; isso ocorre porque os submulticonjuntos estão associados aos seus respectivos tamanhos de reticulado e, com essa associação, a reversibilidade parcial não surge como uma propriedade da regra. O modelo absoluto por sua vez resolve este problema, devido a todas as quantidades de pré-imagens de todas as configurações possíveis até  $L_{max}$  serem adicionadas em um único multiconjunto ordenado.

A regra 15 em ambos os modelos é a mais reversível, já que todas as configurações possíveis até  $L_{max}$  possuem uma única pré-imagem e, como visto anteriormente, a regra 15 é uma conhecida regra reversível no espaço elementar. A regra 0 é considerada a menos reversível já que para cada tamanho de  $L_{max} = 1, \dots, 4$ , existe uma configuração possível de reticulado que possui todas as outras configurações possíveis como pré-imagem.

Tanto o modelo absoluto quanto o modelo direto foram testados para verificar a reversibilidade parcial relativa das regras no espaço elementar. Os gráficos das Figuras 23 e 24 apresentam a reversibilidade parcial relativa dos modelos direto e absoluto respectivamente para até  $L_{max} = 18$ , em que os pontos destacados com um círculo indicam a PRC  $\{105, 150\}$ ; no eixo  $y$  estão as PRCs classificadas pela ordenação lexicográfica dos padrões de pré-imagens, e no eixo  $x$  o tamanho máximo  $L_{max}$  do reticulado. A legenda à direita de cada gráfico apresenta a classificação das regras para  $L_{max} = 18$ , das menos reversíveis ( $\{0\}$ ) para as mais reversíveis, no caso as próprias reversíveis ( $\{15, 51, 170, 204\}$ ). As classificações finais para  $L_{max} = 18$  dos modelos direto e absoluto estão listadas no Apêndice A.

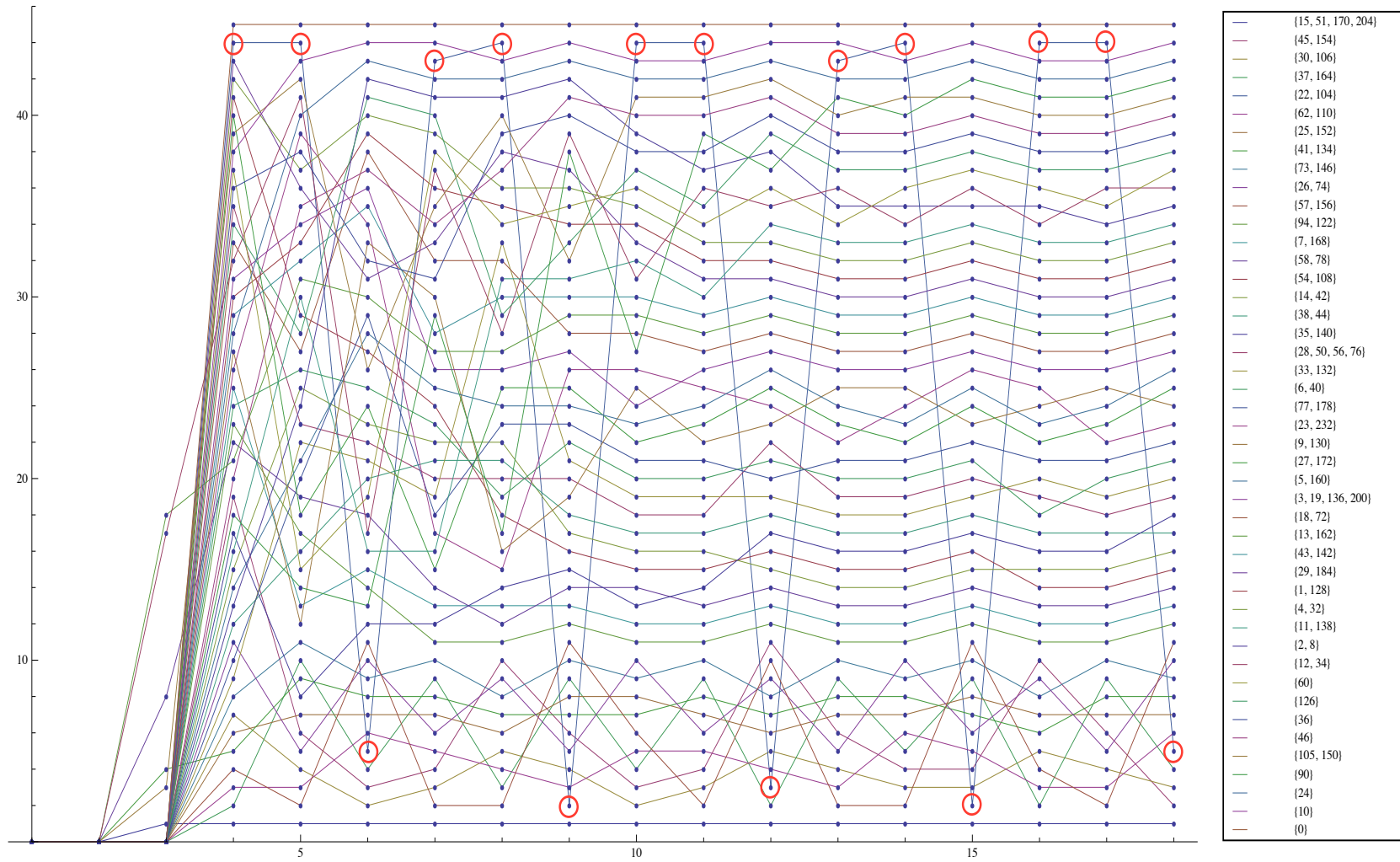


Figura 23: Modelo direto até para  $L_{max} = 18$  (DE OLIVEIRA; FREITAS, 2010, pág. 48).

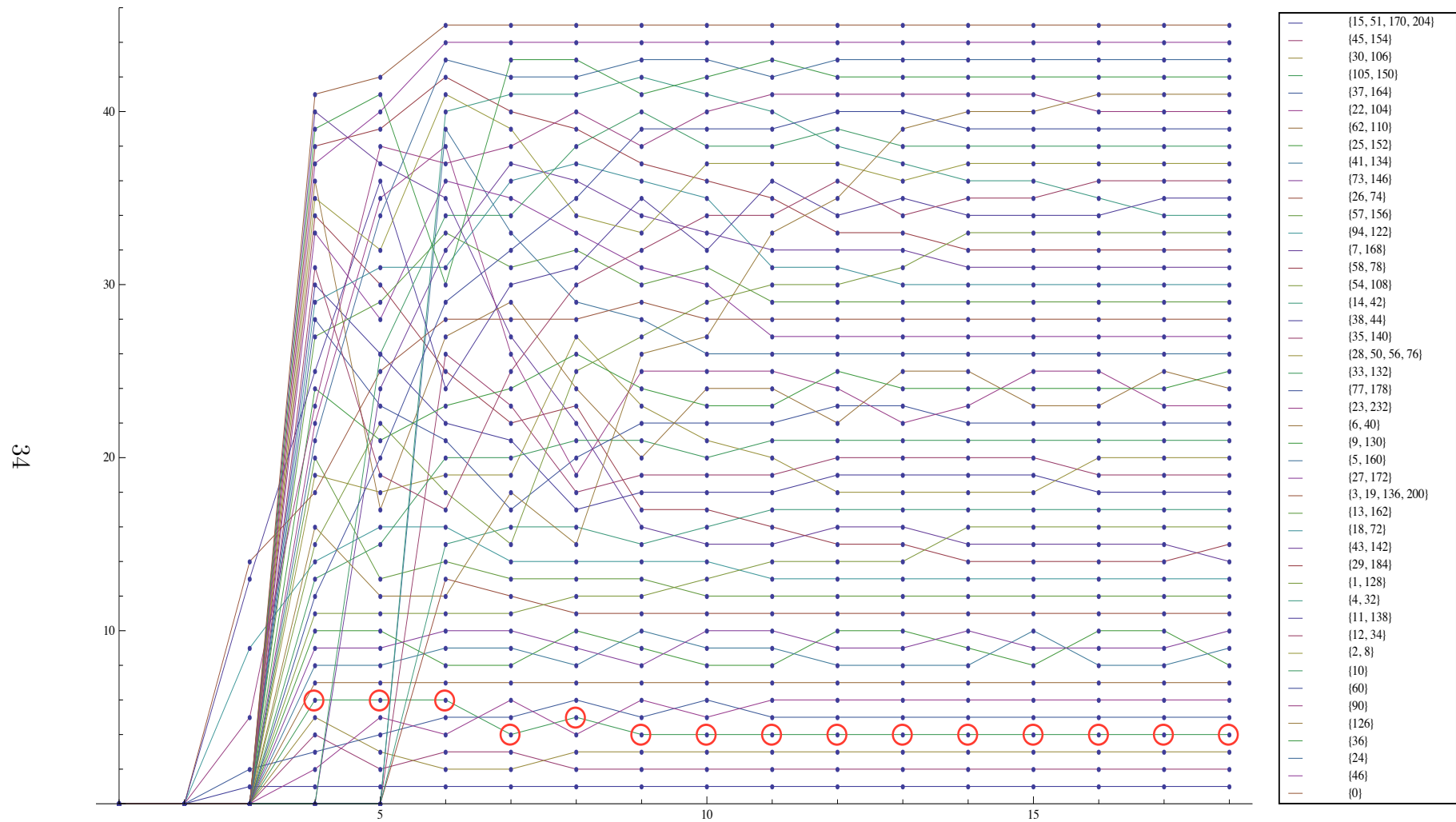


Figura 24: Modelo absoluto até para  $L_{max} = 18$  (DE OLIVEIRA; FREITAS, 2010, pág. 47).

Ao comparar a classificação das PRCs do modelo direto com as do absoluto, nota-se que o modelo direto possui mais variações na ordenação que o modelo absoluto. As variações que ocorrem no modelo direto devem-se ao fato da associação com o tamanho do reticulado, ou seja, existe um submulticonjunto para cada tamanho de reticulado até  $L_{max}$ . Ao associar o modelo com o tamanho do reticulado, a reversibilidade parcial não surge como uma propriedade da regra e por este motivo o modelo absoluto foi escolhido como o modelo mais adequado.

A PRC  $\{105, 150\}$  destacada em ambos os gráficos acima com um círculo, é um exemplo da associação do tamanho do reticulado com o padrão de pré-imagem; isso porque conforme visto anteriormente as regras 105 e 150 não são reversíveis para reticulados múltiplos de três. No gráfico da Figura 23 quando o tamanho do reticulado é múltiplo de 3 a PRC se aproxima da PRC menos reversível ( $\{0\}$ ); mas quando o reticulado não é múltiplo de 3, a PRC se aproxima da PRCs mais reversível ( $\{15, 51, 170, 204\}$ ). No gráfico da Figura 24 a PRC apresenta comportamento estável, já que não há associação do tamanho do reticulado com o padrão de pré-imagem.

Após a conclusão do trabalho realizado por de Oliveira e Freitas (2010) o gráfico para  $L_{max} = 33$  foi gerado; o modelo absoluto mantém em grande parte um comportamento estável, com algumas PRCs que aparentam entrar em variação periódica de classificação, como por exemplo as PRCs  $\{38, 44\}$ ,  $\{35, 140\}$  e  $\{28, 50, 56, 76\}$  a partir de  $L_{max} = 11$ . O gráfico para  $L_{max} = 33$  e a classificação final das PRCs estão apresentados, respectivamente, nos Apêndices B e A.

Para obter uma melhor caracterização da ordenação lexicográfica do modelo absoluto, foram realizadas 7 tentativas de modelar tal ordenação por meio de uma função que recebe como parâmetro o padrão de pré-imagem e retorna um número que representa o nível de reversibilidade de uma regra. Por mais que algumas tentativas tenham se aproximado dos resultados esperados, não foi possível eleger uma medida que representasse exatamente a classificação obtida por meio da ordenação lexicográfica do modelo absoluto.

Já que o modelo absoluto abstrai o tamanho do reticulado fazendo com que a reversibilidade parcial surja como uma propriedade da regra, este trabalho passa a utilizar



o modelo absoluto daqui para frente, o que passa a ser referenciado simplesmente por padrão de pré-imagem ( $\mathcal{P}_R$ ).

## 3 REVISITANDO A NOÇÃO DE REVERSIBILIDADE PARCIAL

### 3.1 INTRODUÇÃO: ASPECTOS METODOLÓGICOS

A metodologia utilizada neste trabalho se aplica aos Capítulos 3 e 4, e consistiu em testar e observar os dados obtidos por meio dos conceitos apresentados por de Oliveira e Freitas (2010), McIntosh (1991) e Jeras e Dobnikar (2007). Utilizamos o algoritmo de contagem de pré-imagens implementado em de Oliveira e Freitas (2010), assim como diversas funções para autômatos celulares que facilitam as análises e implementações futuras.

A linguagem utilizada para realizar a implementação dos algoritmos e extração dos dados para análise é a *Wolfram Language* do software *Mathematica*. O principal motivo para utilizar o *Mathematica* é a facilidade da manipulação dos autômatos celulares; a ferramenta possui a função nativa *CellularAutomaton* que executa um autômato celular e também estão sendo utilizadas as funções implementadas por de Oliveira (2015) para facilitar a manipulação dos autômatos celulares, que compõem a biblioteca *CAMat*.

O trabalho reportado em de Oliveira e Freitas (2010) se baseou nos padrões de pré-imagens obtidos até tamanho máximo de reticulado de 31 células. Posteriormente, conseguiu-se processar também as configurações de tamanho 32 e 33, porém não foi possível recuperar essas informações. Aqui neste trabalho, os padrões de pré-imagens foram gerados para o tamanho máximo de reticulado igual a 32.

Para gerar os padrões de pré-imagens para o tamanho igual a 32, o algoritmo de contagem de pré-imagens também foi implementado utilizando a linguagem Java, a escolha da linguagem foi devido a facilidade de implementar processos paralelos. As configurações utilizadas do servidor foram: 8 cores Intel Xeon E5-2670 (Sandy Bridge) operando a 2,6 GHz, 30 GB de memória e 120 GB de armazenamento SSD, o tempo de processamento foi de aproximadamente 20 dias com tempo integral dos servidores criados. Devido às demandas exponenciais de tempo de processamento e espaço de armazenamento, limitou-

se os padrões de pré-imagens ao tamanho máximo de 32. Também foi desenvolvido um algoritmo em Java que valida se os padrões de pré-imagens estão corretos. O algoritmo verifica se a soma das quantidades de pré-imagens dos padrões é o mesmo dado pela Equação 3, e os dados gerados em de Oliveira e Freitas (2010) e neste trabalho foram validados com sucesso.

Uma orientação metodológica adicional nesta pesquisa foi o uso de condição de contorno cíclica dos reticulados, já que de acordo com Kari (2005) a reversibilidade de regras é a mesma seja a condição de contorno fixa ou cíclica.

### 3.2 REVERSIBILIDADE PARCIAL COMO UMA PROPRIEDADE DA REGRA

Conforme já mencionamos, o padrão de pré-imagem decorrente do modelo absoluto abstrai o tamanho do reticulado, fazendo com que a reversibilidade parcial surja como uma propriedade da regra. De forma similar, é pertinente questionar se a ordenação lexicográfica utiliza efetivamente todas as quantidades de pré-imagens de uma regra, o que representa, de certa forma o uso efetivo de todos os comprimentos de reticulado envolvidos no padrão.

Para tanto, considerem-se as regras elementares 1 e 68, com  $L_{max} = 4$ , e seus respectivos padrões de pré-imagens:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_1 &= \{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1^*, 1, 3, 7, 11\} \\ \mathcal{P}_{68} &= \{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2^*, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3\}\end{aligned}$$

Segundo a ordenação lexicográfica, a regra 1 seria a mais reversível, já que possui mais configurações com quantidades de pré-imagens iguais a 1; a comparação é realizada até  $l_8$ , quantidade de pré-imagem destacada com “\*”, e as demais quantidades de pré-imagens são descartadas. Ao descartar as quantidades de pré-imagens a partir de  $l_8$  o tamanho do reticulado não é abstraído, já que existem quantidades de pré-imagens pertencentes a possíveis configurações de reticulado que não foram computadas.

Os padrões de pré-imagens somente são comparados por completo pela ordenação lexicográfica, se e somente se forem idênticos. Para demonstrar que essa afirmação é verdadeira, considere dois padrões de pré-imagens inicialmente idênticos de regras hipotéticas  $H_1$  e  $H_2$  com  $L_{max} = 2$ .

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{H_1} &= \{1, 1, 1, 3\} \\ \mathcal{P}_{H_2} &= \{1, 1, 1, 3\}\end{aligned}$$

Qualquer alteração realizada nos padrões de pré-imagens nessa demonstração, deve respeitar a somatória de todas as quantidades pré-imagens dada pela equação  $qtd_{max}(L_{max})$  (Equação 3); por exemplo ao somar as quantidades de pré-imagens de  $\mathcal{P}_{H_1}$ ,  $1+1+1+3 = 6$ , que respeita o valor retornado por  $qtd_{max}(2) = 6$ .

Ao modificar a última quantidade de pré-imagem  $l_4 \in \mathcal{P}_{H_2}$  de 3 para 4, o padrão de pré-imagem é modificado para  $\{1, 1, 4\}$ , essa alteração faz com que os padrões não sejam comparados por completo; a comparação ocorre até as quantidades de pré-imagens destacadas com “\*” abaixo.

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{H_1} &= \{1, 1, 1^*, 3\} \\ \mathcal{P}_{H_2} &= \{1, 1, 4^*\}\end{aligned}$$

Caso a última quantidade de pré-imagem  $l_4 \in \mathcal{P}_{H_2}$  seja alterada de 3 para 2, o padrão de pré-imagem pode ser modificado para  $\{1, 1, 2, 2\}$ , fazendo com que os padrões também não sejam comparados por completo; a comparação ocorre até as quantidades de pré-imagens destacadas com “\*” abaixo.

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{H_1} &= \{1, 1, 1^*, 3\} \\ \mathcal{P}_{H_2} &= \{1, 1, 2^*, 2\}\end{aligned}$$

A situação em que todas as quantidades de pré-imagens dos padrões sejam comparadas e que somente a última quantidade de pré-imagem seja diferente não pode ocorrer, porque a somatória de todas as quantidades de pré-imagens deve ser preservada (Equação 3). Abaixo exemplifica-se a situação na qual todas as quantidades de pré-imagens são comparadas, porém a somatória das quantidades de pré-imagens de  $\mathcal{P}_{H_2}$  não é igual a  $qtd_{max}(2) = 6$ .

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{H_1} &= \{1, 1, 1, 3\}, 1 + 1 + 1 + 3 = 6 \\ \mathcal{P}_{H_2} &= \{1, 1, 1, 2\}, 1 + 1 + 1 + 2 = 5\end{aligned}$$

No trabalho realizado por Freitas (2010), foram reportadas tentativas infrutíferas de se criar uma grandeza cujo valor fosse em função do padrão de pré-imagem e que representasse o nível de reversibilidade da regra, de forma que, ao ser aplicada nas regras, resultasse em uma classificação das PRCs semelhante ao obtido com a ordenação lexicográfica. Como a ordenação lexicográfica não abstrai o tamanho do reticulado da regra, vamos propor uma nova função que mantenha a abstração do tamanho do reticulado, ou seja, uma grandeza que calcule o nível de reversibilidade de uma regra considerando todas as quantidades de pré-imagens contidas em um padrão de pré-imagem; matematicamente, essa grandeza pode ser vista com uma função do tipo:

$$\delta_R \longrightarrow \mathcal{P}_R : \mathbb{Q}^+ \tag{4}$$

Para tanto, é necessário primeiramente entender a informação contida em  $l_i \in \mathcal{P}_R$ . Dado que  $l_i$  contém a quantidade de pré-imagem de uma possível configuração no passo  $t$ , para revertê-la corretamente para o passo  $t - 1$ , existe somente 1 configuração dentre as  $l_i$  configurações possíveis que seja a correta, ou seja, temos a probabilidade de  $1/l_i$  de revertê-la corretamente. Ou seja, o valor  $1/l_i$  pode ser interpretado como a probabilidade de reversão.

Dessa forma, calculando a probabilidade de reverter corretamente uma configuração para todas as quantidades de pré-imagens  $l_i \in \mathcal{P}_R$ , temos a probabilidade de reverter corretamente todas as configurações possíveis de reticulado até  $L_{max}$  de uma regra. Mas calcular todas as probabilidades de  $l_i \in \mathcal{P}_R$  não é o suficiente, dado que estamos interessados em obter o nível de reversibilidade de uma regra, independente da configuração e tamanho do reticulado; dessa forma o valor resultante representaria o nível de reversibilidade da regra. Assim, as probabilidades  $1/l_i \in \mathcal{P}_R$  devem ser somadas e o resultado dividido pela quantidade máxima de configurações possíveis até  $L_{max}$ . O nível de reversibilidade de uma regra está normalizado no intervalo fechado  $[0, 100]$ , sendo que 0 indica que a regra não é reversível e 100 que a regra é reversível; portanto a equação  $\delta_R$



41,1, e a regra 15, que é uma conhecida regra reversível no espaço elementar, possui nível 100 de reversibilidade, ou seja ela é reversível. Para efeito de comparação, também foi utilizada a operação de multiplicação de cada  $1/l_i$  ao invés da soma; a PRC  $\{15, 51, 170, 204\}$ , composta pelas conhecidas regras reversíveis no espaço elementar, não apresenta neste caso nível de reversibilidade 100; já a PRC  $\{0\}$ , considerada a regra menos reversível no espaço elementar, não possui o menor nível de reversibilidade dentre as demais PRCs. Dessa forma, conclui-se que a abordagem baseada na multiplicação de cada  $1/l_i$  não leva a uma interpretação coerente.

Naturalmente, o nível de reversibilidade dado por  $\delta_R$  permite classificar as regras e agrupar as que possuam o mesmo nível. Isso foi realizado para o espaço elementar até  $L_{max} = 32$ , e os resultados foram plotados no gráfico apresentado na Figura 25. No eixo  $y$  estão as PRCs ordenadas das menos reversíveis ( $\{0\}$ ) na parte inferior, para as mais reversíveis ( $\{15,51,170,204\}$ ), e no eixo  $x$  o tamanho máximo ( $L_{max}$ ) do reticulado; todos os níveis de reversibilidade calculados de  $L_{max} = 1, \dots, 32$  estão listados no Apêndice C.

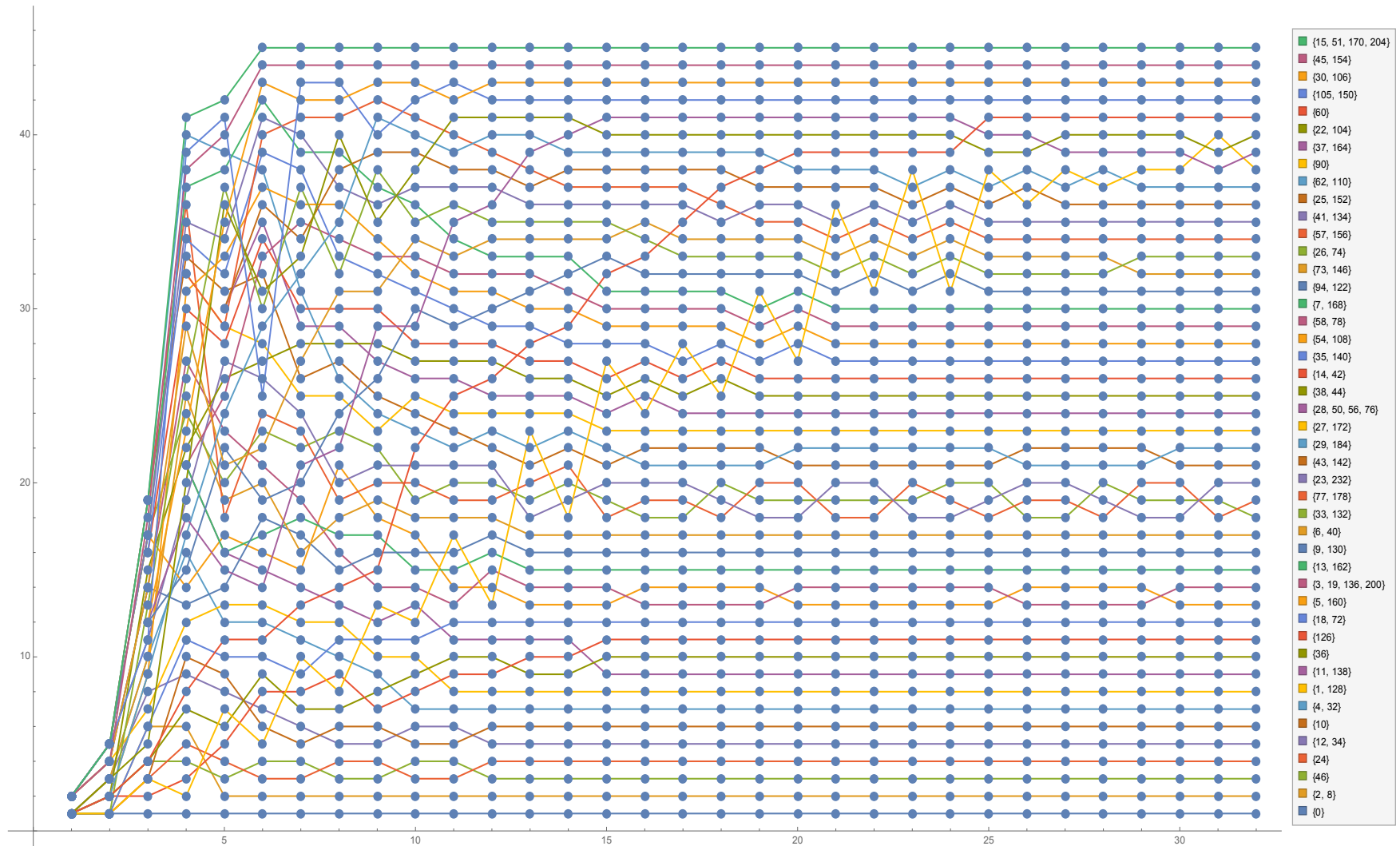


Figura 25: Reversibilidade parcial relativa no espaço elementar,  $L_{max} = 32$ .



A maioria das PRCs plotadas no gráfico acima estabilizam, não ocorrendo trocas de posição na classificação conforme  $L_{max}$  aumenta. As PRCs  $\{3, 19, 136, 200\}$  e  $\{5, 160\}$ ,  $\{29, 184\}$  e  $\{43, 142\}$ ,  $\{26, 74\}$  e  $\{73, 146\}$ ,  $\{22, 104\}$  e  $\{37, 164\}$  aparentam entrar em variação periódica de classificação; as PRCs  $\{23, 232\}$ ,  $\{77, 178\}$  e  $\{33, 132\}$  variam de ordem entre si, porém não é possível verificar se ocorre alguma periodicidade na variação até  $L_{max} = 32$ . As PRCs  $\{60\}$  e  $\{90\}$  se afastam das menos reversíveis, comportamento contrário ao da reversibilidade parcial relativa obtida por meio da ordenação lexicográfica.

Adicionalmente, plotou-se também o gráfico com os níveis de reversibilidade das regras no espaço elementar a partir de  $L_{max} = 6$ , isso devido ao fato das PRCs que se formaram a partir deste tamanho não sofrerem alterações até  $L_{max} = 32$ . O gráfico apresentado na Figura 26, possui no eixo  $y$  os níveis de reversibilidade das regras normalizados de 0 a 100, e no eixo  $x$  o tamanho  $L_{max}$  do reticulado.

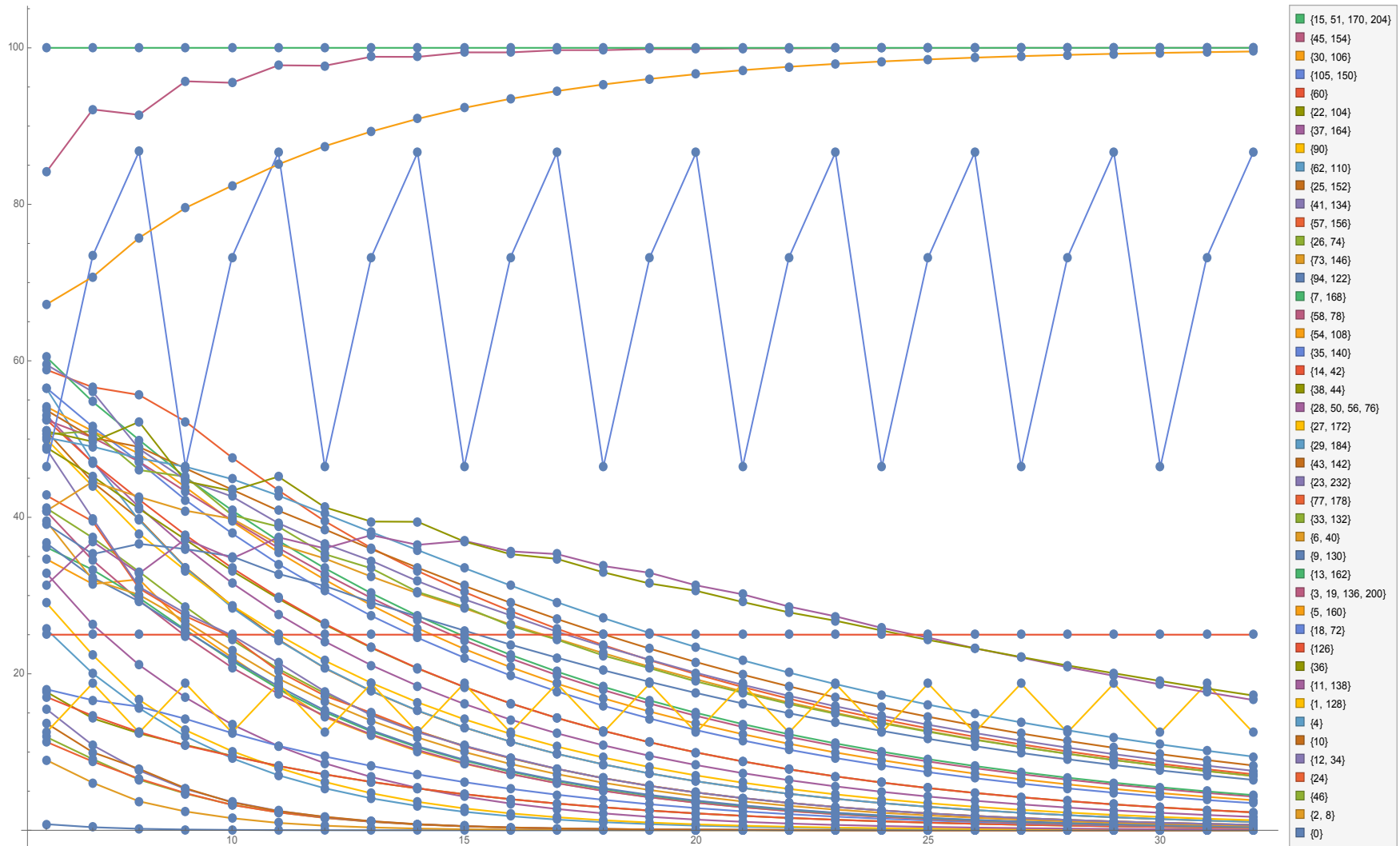


Figura 26: Níveis de reversibilidade das regras no espaço elementar,  $L_{max} = 6, \dots, 32$ .

No gráfico acima a PRC  $\{15, 51, 170, 204\}$  composta pelas conhecidas regras reversíveis no espaço elementar possui um nível de 100 de reversibilidade; no outro extremo tem-se a PRC  $\{0\}$ , composta pela regra considerada menos reversível; o gráfico também mostra o motivo pelo qual as PRCs  $\{60\}$  e  $\{90\}$  se afastam das menos reversíveis no gráfico da reversibilidade parcial relativa (Figura 25). A explicação é que a PRC  $\{60\}$ , representada pela 5ª linha de cima para baixo, em  $L_{max} = 32$ , possui nível de reversibilidade estável em 25; dessa forma, como os níveis das demais PRCs diminui à medida que  $L_{max}$  aumenta, então não é a PRC  $\{60\}$  que se afasta das menos reversíveis, e sim as demais PRCs que se aproximam das menos reversíveis. Situação análoga ocorre com a PRC  $\{90\}$ , representada pela 8ª linha amarela de cima para baixo, em  $L_{max} = 32$ , com a diferença que a PRC  $\{90\}$  possui variação aparentemente periódica em seu nível de reversibilidade.

Como já dissemos, a análise do gráfico está limitada em  $L_{max} = 32$  devido ao alto tempo de processamento para gerar os padrões de pré-imagens para tamanhos superiores de reticulados; por este motivo não foi possível verificar empiricamente em quais níveis de reversibilidade as PRCs vão estabilizar. Alternativamente, as PRCs no gráfico foram divididas em três grupos, e procurou-se inferir de forma mais analítica o nível limite de reversibilidade com  $L_{max}$  progressivamente maiores. Os grupos são:  $\approx$  PRCs em que seus respectivos níveis são estáveis ou possuem variação periódica;  $\updownarrow$  PRCs em que seus respectivos níveis tendem a 100; e  $\neg \updownarrow$  PRCs em que seus respectivos níveis tendem a 0.

$\approx$	$\{105, 150\}, \{90\}, \{60\}$
$\updownarrow$	$\{15, 51, 170, 204\}, \{45, 154\}, \{30, 106\}$
$\neg \updownarrow$	$\{0\}, \{2, 8\}, \{46\}, \{24\}, \{12, 34\}, \{10\}, \{4, 32\}, \{1, 128\}, \{11, 138\}, \{36\}, \{126\},$ $\{18, 72\}, \{5, 160\}, \{3, 19, 136, 200\}, \{13, 162\}, \{9, 130\}, \{6, 40\}, \{33, 132\},$ $\{77, 178\}, \{23, 232\}, \{43, 142\}, \{29, 184\}, \{27, 172\}, \{28, 50, 56, 76\}, \{38, 44\},$ $\{14, 42\}, \{35, 140\}, \{54, 108\}, \{58, 78\}, \{7, 168\}, \{94, 122\}, \{73, 146\}, \{26, 74\},$ $\{57, 156\}, \{41, 134\}, \{25, 152\}, \{62, 110\}, \{37, 164\}, \{22, 104\}$

Tabela 7: Classificação das PRCs.

Para cada um dos grupos acima, as respectivas funções  $\delta_R$  foram reescritas em função de  $L_{max}$ , pois alguns dos padrões de pré-imagens de algumas PRCs possuem um padrão de formação; com isso os limites dos níveis de reversibilidade puderam ser calculados. Para as PRCs com mais de uma regra, somente a primeira regra foi utilizada nos cálculos; uma vez que regras contidas em uma PRC possuem o mesmo padrão de pré-imagem.

O primeiro grupo analisado foi o  $\approx$ , no qual os níveis de reversibilidade das PRCs são estáveis ou possuem uma variação periódica. Na PRC  $\{105, 150\}$  observou-se que as quantidades de pré-imagens não mudam conforme o  $L_{max}$  aumenta, e sim a frequência de ocorrência das quantidades de pré-imagens; o padrão de pré-imagem da regra 105 é um multiconjunto formado pelas quantidades de pré-imagens 1 e 4, ou seja  $\mathcal{P}_{105} = \{l_i : l_i \in \{1, 4\}\}$ .

As frequências de ocorrências das quantidades de pré-imagens 1 e 4 foram listadas em função de  $L_{max}$ , e as séries analisadas com o software *Mathematica*, resultando em duas equações:  $qtd1_{105}$  e  $qtd4_{105}$ .

$x = L_{max}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$qtd1_{105}(x)$	2	6	6	22	54	54	182	438	438	1462	3510	3510	11702	28086	28086
$qtd4_{105}(x)$	0	0	2	2	2	18	18	18	146	146	146	1170	1170	1170	9362

Tabela 8: Frequência de ocorrência das quantidades de pré-imagens da regra 105.

$$T = 5 \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot x}{3}\right) + \sqrt{3} \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot x}{3}\right)$$

$$qtd1_{105}(x) = \frac{2}{21} [-9 - 2^x \cdot (-14 + T)] \quad (6)$$

$$qtd4_{105}(x) = \frac{1}{42} [-12 + 2^x \cdot (7 + T)] \quad (7)$$

Com as funções  $qtd1_{105}$  e  $qtd4_{105}$  foi possível reescrever a equação  $\delta_{105}$  em função de  $L_{max}$  (ao invés do padrão de pré-imagem  $\mathcal{P}_{105}$ ). O nível de reversibilidade da regra 105 em função de  $L_{max}$  é definida pela equação  $\delta'_{105}(x)$  abaixo, sendo que a multiplicação por

100 foi retirada da equação já que indica a normalização em porcentagem. Para validar se a equação  $\delta'_{150}$  estava correta até  $L_{max} = 32$ , seus valores foram comparados com os valores da equação  $\delta_{150}$ , e os valores obtidos foram iguais.

$$\delta'_{105}(x) = \frac{qtd1_{105}(x) + (1/4).qtd4_{105}(x)}{-2 + 2^{x+1}} \quad (8)$$

Com a equação  $\delta'_{105}(x)$  é possível obter de forma simples o nível de reversibilidade para qualquer tamanho de reticulado, sem o cálculo do padrão de pré-imagem. Dada a hipótese de que não surjam novas quantidades de pré-imagens, além das quantidades 1 e 4 obtidas até  $L_{max} = 32$ , o limite de  $\delta'_{105}(x)$  com  $x$  tendendo a infinito pôde ser calculado para verificar em qual nível de reversibilidade a PRC  $\{105, 150\}$  estabiliza; os detalhes do cálculo estão no Apêndice D.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \delta'_{105}(x) = \frac{231 - 15. (5. \cos(\frac{2.\pi.x}{3}) + \sqrt{3}. \sin(\frac{2.\pi.x}{3}))}{336}$$

No limite acima, temos a ocorrência de  $x$  nas equações de seno e cosseno, então os valores retornados das funções foram listados para os diferentes valores de  $x$ .

$x = L_{max}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\cos(\frac{2.\pi.x}{3})$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1
$\sin(\frac{2.\pi.x}{3})$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0

Tabela 9: Valores de seno e cosseno em função de  $\frac{2.\pi.x}{3}$ .

No resultado apresentado na tabela acima foi possível identificar um padrão: para valores de  $x \bmod 3 = 0$ , os valores de seno e cosseno são iguais a 1 e 0 respectivamente; para valores de  $x \bmod 3 \neq 0$ , os valores de cosseno são sempre iguais a  $-1/2$  e os valores de seno podem ser  $\sqrt{3}/2$  ou  $-\sqrt{3}/2$ . No gráfico apresentado na Figura 26, a PRC  $\{105, 150\}$  varia em três pontos e no limite calculado de  $\delta'_{105}(x)$ , três resultados se tornam possíveis para valores de seno e cosseno em função de  $x$ .

- $x \bmod 3 = 0$ :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \delta'_{105}(x) &= \frac{231 - 9.(5. \cos(\frac{2.\pi.x}{3}) + \sqrt{3}. \sin(\frac{2.\pi.x}{3}))}{336} = \\ &= 0,464286 = 46,4286\end{aligned}$$

- $x \bmod 3 \neq 0$ :

$$\text{sen}(\frac{2.\pi.x}{3}) = \sqrt{3}/2:$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \delta'_{105}(x) &= \frac{231 - 9.(5. \cos(\frac{2.\pi.x}{3}) + \sqrt{3}. \sin(\frac{2.\pi.x}{3}))}{336} \\ &= 0,732142 = 73,2142\end{aligned}$$

$$\text{sen}(\frac{2.\pi.x}{3}) = -\sqrt{3}/2:$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \delta'_{105}(x) &= \frac{231 - 9.(5. \cos(\frac{2.\pi.x}{3}) + \sqrt{3}. \sin(\frac{2.\pi.x}{3}))}{336} \\ &= 0,866071 = 86,6071\end{aligned}$$

Os limites calculados foram validados pelo software *Mathematica* e testes foram realizados com  $L_{max} > 32$ , de forma que, a partir de  $L_{max} > 203$ , os níveis de reversibilidade da PRC  $\{105, 150\}$  estabilizaram nos limites calculados.

O mesmo procedimento foi realizado para a PRC  $\{90\}$ , que também possui variação em seu nível de reversibilidade. Para valores de  $x \bmod 2 = 0$  a regra 90 mantém o nível de reversibilidade em 12,5 e para valores de  $x \bmod 2 \neq 0$ , a grandeza tende a estabilizar em 18,75. Foi verificado que o padrão de pré-imagem da regra 90 é um multiconjunto composto por quantidades de pré-imagens 2 e 4, ou seja  $\mathcal{P}_{90} = \{l_i : l_i \in \{2, 4\}\}$ .

As frequências de ocorrências das quantidades de pré-imagens 2 e 4 foram listadas em função de  $L_{max}$ , e as séries foram analisadas com o software *Mathematica*, resultando em duas equações:  $qtd2_{90}$  e  $qtd4_{90}$ .

$x = L_{max}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$qtd2_{90}(x)$	1	1	5	5	21	21	85	85	341	341	1365	1365	5461	5461	21845
$qtd4_{90}(x)$	0	1	1	5	5	21	21	85	85	341	341	1365	1365	5461	5461

Tabela 10: Frequência de ocorrência das quantidades de pré-imagens da regra 90.

$$qtd2_{90}(x) = \frac{1}{6} \cdot (-2 + 3 \cdot 2^x + (-1)^{1+x} \cdot 2^x) \quad (9)$$

$$qtd4_{90}(x) = \frac{1}{12} \cdot (-4 + (-2^x) + 3 \cdot 2^x) \quad (10)$$

Com as funções  $qtd2_{90}$  e  $qtd4_{90}$  foi possível reescrever a equação  $\delta_{90}$  em função de  $L_{max}$ . Novamente, para validar se a equação  $\delta'_{90}$  estava correta até  $L_{max} = 32$ , seus valores foram comparados com os valores da equação  $\delta_{90}$ , e os valores obtidos foram iguais.

$$\delta'_{90}(x) = \frac{\frac{1}{2} \cdot qtd2_{90}(x) + \frac{1}{4} \cdot qtd4_{90}(x)}{-2 + 2^{x+1}} \quad (11)$$

O limite de  $\delta'_{90}(x)$  com  $x$  tendendo a infinito foi então calculado para determinar o nível de reversibilidade em que a PRC {90} estabiliza; os detalhes do cálculo estão no Apêndice D.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \delta'_{90}(x) = \frac{1}{24} \cdot [3 + (-1)^{1+x}] + \frac{1}{96} \cdot [3 + (-1)^x] \begin{cases} \text{se } x \bmod 2 = 0 : \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \delta'_{90}(x) = 12, 50; \\ \text{se } x \bmod 2 \neq 0, : \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \delta'_{90}(x) = 18, 75. \end{cases}$$

Os limites calculados foram validados pelo software *Mathematica* e testes foram realizados com  $L_{max} > 32$ , de forma que, a partir de  $L_{max} > 105$ , os níveis de reversibilidade da PRC {90} estabilizaram nos limites calculados.

A PRC {60} foi analisada pelo mesmo procedimento das PRCs {105, 150} e {90}, e verificou-se que o nível de reversibilidade com  $x$  tendendo a infinito é 25; os detalhes do cálculo estão no Apêndice D.

O próximo grupo de PRCs analisado foi o  $\uparrow\downarrow$ , composto pelas PRCs que se aproximam de 100. A PRC {15, 51, 170, 204} é composta pelas conhecidas regras reversíveis no espaço elementar, portanto não há a necessidade de verificar em qual nível de reversibilidade a PRC vai estabilizar; seu nível será sempre 100 com  $L_{max}$  tendendo a infinito. As PRCs

$\{45, 154\}$  e  $\{30, 106\}$  que se aproximam das reversíveis foram analisadas pelo mesmo procedimento realizado anteriormente, e seus limites calculados diretamente pelo software *Mathematica*.

Os padrões de pré-imagens da regra 45 são multiconjuntos compostos pelas quantidades de pré-imagens 1, 2 e 3, ou seja  $\mathcal{P}_{45} = \{l_i : l_i \in \{1, 2, 3\}\}$ . A frequência das ocorrências das quantidades de pré-imagens foram listadas e três equações foram obtidas,  $qtd1_{45}(x)$ ,  $qtd2_{45}(x)$  e  $qtd3_{45}(x)$ , conforme mostrado a seguir.

$x = L_{max}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$qtd1_{45}(x)$	2	3	11	20	52	101	229	454	966	1927	3975	7944	16136	32265	65033
$qtd2_{45}(x)$	0	0	0	2	2	8	8	22	22	52	52	114	114	240	240
$qtd3_{45}(x)$	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7

Tabela 11: Frequência de ocorrência das quantidades de pré-imagens da regra 45.

$$\begin{aligned}
qtd1_{45}(x) = & \frac{3 \cdot (\sqrt{2} - 2) 2^{x+3} + 6 \cdot (\sqrt{2} - 2) x - 6 \cdot (-1)^x - 28 \cdot (-1)^{2x}}{12 \cdot (\sqrt{2} - 2)} \\
& + \frac{-3 \cdot 2^{\frac{x}{2}+3} \left( (2 \cdot \sqrt{2} - 3) \cdot (-1)^x - 1 \right) + 3 \cdot \sqrt{2} \cdot (-1)^x + 20 \cdot \sqrt{2} \cdot (-1)^{2 \cdot x} + \sqrt{2} - 14}{12 \cdot (\sqrt{2} - 2)}
\end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}
qtd2_{45}(x) = & \frac{2^{\frac{x}{2}+1} \cdot \left( (2 \cdot \sqrt{2} - 3) \cdot (-1)^x - 1 \right) + 2 \cdot (-1)^x + 4 \cdot (-1)^{2x}}{2 \cdot (\sqrt{2} - 2)} \\
& + \frac{2 \cdot \left( (2 \cdot \sqrt{2} - 3) \cdot (-1)^{2 \cdot x+1} + \sqrt{2} - 1 \right) \cdot x - 3 \cdot \sqrt{2} \cdot (-1)^{2 \cdot x} + \sqrt{2} \cdot (-1)^{x+1} + 2}{2 \cdot (\sqrt{2} - 2)}
\end{aligned} \tag{13}$$

$$qtd3_{45}(x) = \frac{1}{4} \cdot (-1)^x \cdot \left( (-1)^x \cdot (2 \cdot x - 1) + 1 \right) \tag{14}$$

Novamente, com as funções  $qtd1_{45}$ ,  $qtd2_{45}$  e  $qtd3_{45}$  foi possível reescrever a equação  $\delta_{45}$  em função de  $L_{max}$ . Para validar se a equação  $\delta'_{45}$  estava correta até  $L_{max} = 32$ , seus valores foram comparados com os valores da equação  $\delta_{45}$ , e os valores obtidos foram



iguais.

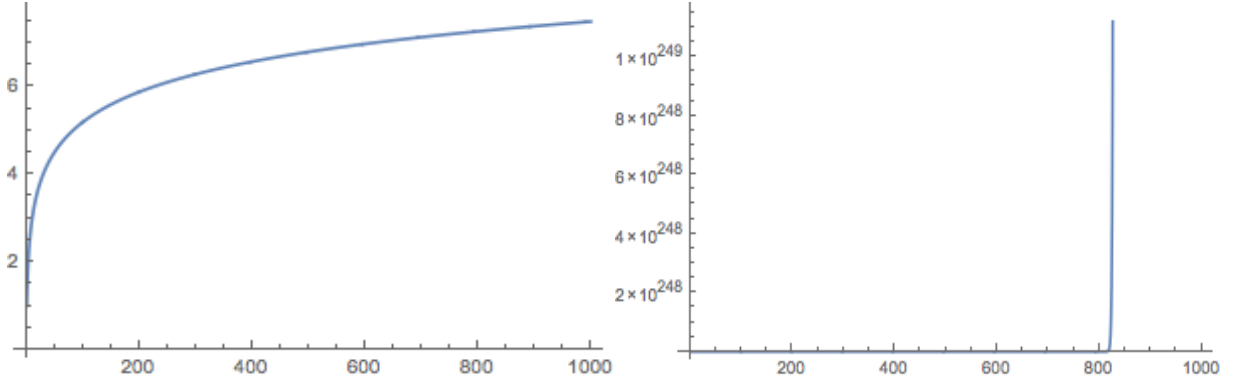
$$\delta'_4 5(x) = \frac{qtd1_{45}(x) + \frac{1}{2} \cdot qtd2_{45}(x) + \frac{1}{3} \cdot qtd3_{45}(x)}{-2 + 2^{x+1}} \quad (15)$$

O limite da equação  $\delta'_4 5(x)$  com  $x$  tendendo a infinito foi calculado com o software *Mathematica* e o resultado obtido foi  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \delta'_4 5(x) = 1$ , ou seja a PRC  $\{45, 154\}$  tende a 100 de reversibilidade com  $L_{max}$  tendendo a infinito. A PRC  $\{30, 106\}$  também foi analisada e o resultado obtido foi  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \delta'_{30}(x) = 1$ , os detalhes do processo estão descritos no Apêndice D.

As PRCs analisadas possuem padrões de pré-imagens compostos por valores de quantidades de pré-imagens constantes, variando apenas a frequência de suas ocorrências; por exemplo as regras da PRC  $\{105, 150\}$  possuem padrões de pré-imagens compostos pelas quantidades de pré-imagens 1 e 4. Ao iniciar a análise das PRCs do grupo  $\neg \uparrow \downarrow$  percebeu-se que novas quantidades de pré-imagens, sempre maiores que as anteriores, aparecem nos padrões de pré-imagens conforme  $L_{max}$  aumenta. Dado esse padrão de formação, não foi possível equacionar a frequência de ocorrência em função de  $L_{max}$ . Abaixo o padrão de pré-imagem da regra 22 pertencente a PRC  $\{22, 104\}$  exemplifica essa situação, no qual o expoente de cada quantidade de pré-imagem representa sua frequência de ocorrência.

$$\mathcal{P}_{22} = \{1^{19490}, 2^{6227}, 3^{3023}, 4^{1144}, 5^{619}, 6^{347}, 7^{303}, 8^{58}, 9^{306}, 10^{41}, 11^{16}, 12^{15}, 13^{184}, 14^{44}, 16^1, \\ 19^{53}, 20^{15}, 22^1, 27^{14}, 28^{43}, 32^1, 39^{15}, 41^{30}, 47^1, 68^1, 99^1, 145^1, 212^1, 310^1\}$$

Apesar de não ser possível equacionar a frequência de ocorrência das quantidades de pré-imagens, o limite pôde ser calculado com a análise dos componentes da equação  $\delta_R$ . A ordem de crescimento do numerador da equação  $\delta_R$  se assemelha com a de uma série harmônica  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ , que diverge lentamente com  $n$  tendendo a infinito; já o denominador possui ordem de crescimento exponencial (Equação 3). As Figuras 2a e 2b ilustram a ordem de crescimento de uma série harmônica e da Equação 3 respectivamente.



(a) Ordem de crescimento do numerador. (b) Ordem de crescimento do denominador.

Figura 27: Ordem de crescimento dos componentes da equação  $\delta_R$ .

Se o numerador da equação  $\delta_R$  possui crescimento semelhante ao da série harmônica, e o denominador possui crescimento exponencial, então o limite do nível de reversibilidade com  $L_{max}$  tendendo a infinito será 0; o limite calculado abaixo foi validado pelo software *Mathematica*.

$$\lim_{L_{max} \rightarrow +\infty} \delta_R(\mathcal{P}_R, L_{max}) = \left( \frac{\overbrace{\sum_{i=1}^{|\mathcal{P}_R|} \frac{1}{l_i}}^{\text{Semelhante à série harmônica}}}{\underbrace{-2 + 2^{L_{max}+1}}_{\text{Tende a infinito}}} \right) \cdot 100 = 0$$

Para cada regra de todas as PRCs do grupo  $\neg \uparrow \downarrow$  foi verificado que seus padrões de pré-imagens são semelhantes ao da regra 22, logo todas irão tender a 0 com  $L_{max}$  tendendo a infinito.

A equação  $\delta_R$  definida para obter o nível de reversibilidade de uma regra manteve a abstração do tamanho do reticulado que o padrão de pré-imagem possui, já que em seu cálculo todas as quantidades de pré-imagens são levadas em consideração. Além disso, a função quantifica o nível de reversibilidade que uma regra possui em um valor numérico, não sendo necessário mais realizar a comparação dos padrões de pré-imagens para determinar o quanto uma regra é reversível. Também foi possível verificar quais regras no espaço elementar tendem a ser reversíveis conforme o tamanho do reticulado

tende a infinito, sem a necessidade do padrão de pré-imagem; isso por meio da análise da frequência de ocorrência das quantidades de pré-imagens dos padrões de pré-imagens.

Outro ponto importante foi a possibilidade de analisar os níveis de reversibilidade de cada PRC individualmente. No gráfico Figura 26 essa análise foi plotada e observou-se que as PRCs  $\{45, 154\}$  e  $\{30, 106\}$  se aproximam das reversíveis, as PRCs  $\{90\}$  e  $\{105, 150\}$  mantêm uma variação periódica do nível de reversibilidade, a PRC  $\{60\}$  mantém o nível de reversibilidade constante, e as demais PRCs se aproximam das menos reversíveis. Foi possível verificar ainda o motivo pelo qual as PRCs  $\{60\}$  e  $\{90\}$  se afastam das menos reversíveis na classificação relativa. Assim, as PRCs  $\{60\}$  e  $\{90\}$ , que, respectivamente, possuem níveis de reversibilidade constante e com variação periódica, não se afastaram das menos reversíveis, mas foram as demais PRCs que se aproximaram de 0 ou 100.

## 4 CLASSES DE REVERSIBILIDADE PARCIAL

A execução do cálculo do nível de reversibilidade das regras no espaço elementar, para  $L_{max} = 32$  resultou no agrupamento das regras mostrado na Figura 25; o agrupamento das regras ocorre devido à ocorrência do mesmo nível de reversibilidade e, como visto anteriormente, cada agrupamento de regras é definido como uma *Classe de Reversibilidade Parcial* (PRC - *Partial Reversibility Class*).

Para as PRCs no espaço elementar que possuem mais que uma regra foi verificado se existe alguma equivalência dinâmica por meio das operações de conjugação, reflexão e conjugação-reflexão (WOLFRAM, 2002), e o resultado foi negativo. Para obter uma PRC é preciso encontrar alguma relação entre as regras de cada classe que possua mais de uma regra; para isso, realizou-se o agrupamento das PRCs obtidas para  $L_{max} = 32$  (Apêndice C) pela cardinalidade de cada classe mantendo a ordenação das reversíveis para as menos reversíveis, gerando três subconjuntos,  $|PRC| = 4 \rightarrow PRC_4$ ,  $|PRC| = 2 \rightarrow PRC_2$  e  $|PRC| = 1 \rightarrow PRC_1$ , descrito na Tabela 12.

$PRC_1$	$\{10\}, \{60\}, \{90\}, \{126\}, \{36\}, \{24\}, \{46\}, \{0\}$
$PRC_2$	$\{45, 154\}, \{30, 106\}, \{105, 150\}, \{37, 164\}, \{22, 104\}, \{62, 110\}, \{25, 152\}, \{41, 134\},$ $\{73, 146\}, \{26, 74\}, \{57, 156\}, \{94, 122\}, \{7, 168\}, \{58, 78\}, \{54, 108\}, \{14, 42\},$ $\{38, 44\}, \{35, 140\}, \{33, 132\}, \{77, 178\}, \{23, 232\}, \{6, 40\}, \{9, 130\}, \{5, 160\},$ $\{27, 172\}, \{13, 162\}, \{18, 72\}, \{43, 142\}, \{29, 184\}, \{1, 128\}, \{4, 32\}, \{11, 138\},$ $\{12, 34\}, \{2, 8\}$
$PRC_4$	$\{15, 51, 170, 204\}, \{28, 50, 56, 76\}, \{3, 19, 136, 200\}$

Tabela 12: Classes de Reversibilidade Parcial (PRCs).

Após o agrupamento, para cada regra de cada PRC, listou-se suas respectivas equivalentes dinâmicas e suas transições de estado. Observando as classes que possuem duas regras, verificou-se que estas não são equivalentes dinâmicas (WOLFRAM, 2002); portanto, a análise deve ser feita com uma classe que possua mais de uma regra. Na Tabela 13 são listadas as equivalentes dinâmicas e as transições de estado da classe  $\{45, 154\}$  da Tabela 12.

PRC	45				154			
EDs	45	75 <sup>(1)</sup>	89 <sup>(2)</sup>	101 <sup>(3)</sup>	154	166 <sup>(1)</sup>	180 <sup>(2)</sup>	210 <sup>(3)</sup>
Transições de Estado	111 → 0	111 → 0	111 → 0	111 → 0	111 → 1	111 → 1	111 → 1	111 → 1
	110 → 0	110 → 1	110 → 1	110 → 1	110 → 0	110 → 0	110 → 0	110 → 1
	101 → 1	101 → 0	101 → 0	101 → 1	101 → 0	101 → 1	101 → 1	101 → 0
	100 → 0	100 → 0	100 → 1	100 → 0	100 → 1	100 → 0	100 → 1	100 → 1
	011 → 1	011 → 1	011 → 1	011 → 0	011 → 1	011 → 0	011 → 0	011 → 0
	010 → 1	010 → 0	010 → 0	010 → 1	010 → 0	010 → 1	010 → 1	010 → 0
	001 → 0	001 → 1	001 → 0	001 → 0	001 → 1	001 → 1	001 → 0	001 → 1
	000 → 1	000 → 1	000 → 1	000 → 1	100 → 0	000 → 0	000 → 0	000 → 0

\*EDs = Equivalentes dinâmicas por conjugação (1), conjugação-reflexão (2) e reflexão (3).

Tabela 13: Equivalentes dinâmicas e transições de estados para a PRC {45,154}.

Com a Tabela 13, é possível identificar a existência de uma relação entre as equivalentes dinâmicas da regra 45 e as equivalentes dinâmicas da regra 154. Ao inverter os bits das vizinhanças ( $0 \rightarrow 1$  e  $1 \rightarrow 0$ ) da regra 45, mantendo o próximo estado e, em seguida, ordenando novamente as vizinhanças lexicograficamente, obtém-se a regra 180. Como a regra 180 é equivalente dinâmica da regra 154, basta obter a menor equivalente dinâmica da regra 180 para encontrar a classe de reversibilidade parcial {45,154}.

Essa operação estabelece uma relação entre as regras de uma classe de reversibilidade parcial, aqui definida como *conjugação da vizinhança*, representada pela operação  $\mathcal{NC} : R \rightarrow R$ . Na Tabela 14 a operação da conjugação da vizinhança é exemplificada na regra 45.

45	Conjugação - Ordenação	180
111 $\rightarrow$ 0	000 $\rightarrow$ 0	111 $\rightarrow$ 1
110 $\rightarrow$ 0	001 $\rightarrow$ 0	110 $\rightarrow$ 0
101 $\rightarrow$ 1	010 $\rightarrow$ 1	101 $\rightarrow$ 1
100 $\rightarrow$ 0	011 $\rightarrow$ 0	100 $\rightarrow$ 1
011 $\rightarrow$ 1	100 $\rightarrow$ 1	011 $\rightarrow$ 0
010 $\rightarrow$ 1	101 $\rightarrow$ 1	010 $\rightarrow$ 1
001 $\rightarrow$ 0	110 $\rightarrow$ 0	001 $\rightarrow$ 0
000 $\rightarrow$ 1	111 $\rightarrow$ 1	000 $\rightarrow$ 0

Tabela 14: Conjugação da vizinhança.

A operação  $\mathcal{NC}$  foi então executada para cada representante das classes de equivalência dinâmica no espaço elementar na tentativa de se obter o mesmo resultado da Tabela 12, e o resultado é apresentado na Tabela 15.

$PRC_1$	$\{10\}, \{60\}, \{90\}, \{126\}, \{36\}, \{24\}, \{46\}, \{0\}$
$PRC_2$	$\{15, 170\}, \{51, 204\}, \{28, 56\}, \{50, 76\}, \{3, 136\}, \{19, 200\}, \{45, 154\},$ $\{30, 106\}, \{105, 150\}, \{37, 164\}, \{22, 104\}, \{62, 110\}, \{25, 152\}, \{41, 134\}, \{73, 146\},$ $\{26, 74\}, \{57, 156\}, \{94, 122\}, \{7, 168\}, \{58, 78\}, \{54, 108\}, \{14, 42\}, \{38, 44\},$ $\{35, 140\}, \{33, 132\}, \{77, 178\}, \{23, 232\}, \{6, 40\}, \{9, 130\}, \{5, 160\}, \{27, 172\},$ $\{13, 162\}, \{18, 72\}, \{43, 142\}, \{29, 184\}, \{1, 128\}, \{4, 32\}, \{11, 138\}, \{12, 34\}, \{2, 8\}$
$PRC_4$	

Tabela 15: Resultado da função  $\mathcal{NC}$  para todas as representantes das regras dinamicamente equivalentes no espaço elementar

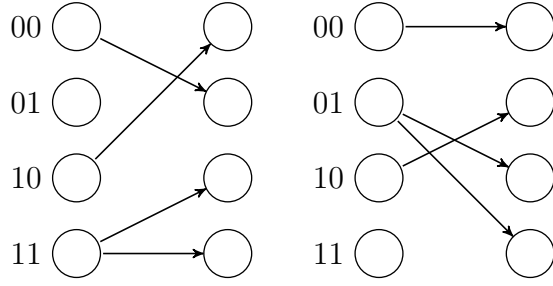
Na Tabela 16, o resultado da operação  $\mathcal{NC}$  apresentado na Tabela 15 é comparado com as PRCs da Tabela 12.

Tabela 12	Tabela 15
$PRC_1$	$= PRC_1$
$PRC_2$	$\subset PRC_2$
$PRC_4$	$\neq PRC_4$

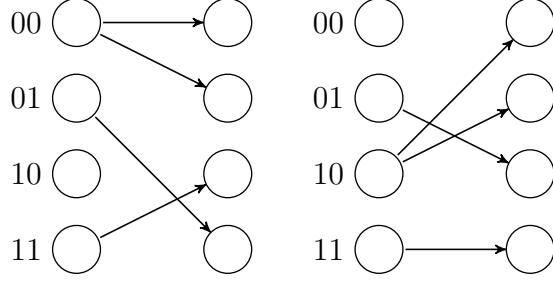
Tabela 16: Comparativo dos conjuntos  $PRC_1$ ,  $PRC_2$  e  $PRC_4$  entre as tabelas Tabela 12 e Tabela 15.

Os testes demonstram que para as classes da PRC com tamanho 1 ou 2, a operação  $\mathcal{NC}$  agrupa corretamente as regras que possuem o mesmo padrão de pré-imagem; para as classes de tamanho igual a 4, as regras se agruparam respeitando as quantidades de pré-imagem, porém em duplas:  $\{15, 170\}$ ,  $\{51, 204\}$ ,  $\{28, 56\}$ ,  $\{50, 76\}$ ,  $\{3, 136\}$  e  $\{19, 200\}$ .

Para verificar que a operação  $\mathcal{NC}$  é válida recorre-se aos GDBm's utilizados no algoritmo de listagem de pré-imagens de Jeras e Dobnikar (2007); essa análise é válida uma vez que o algoritmo de contagem de pré-imagem (utilizado para gerar os padrões de pré-imagens empregados no cálculo de  $\delta_R$  que definem as PRCs) é equivalente ao algoritmo de listagem de pré-imagens. A Figura 28 ilustra os GDBm's das regras 45 e 180.



(a)  $D^{(45)}(0)$  e  $D^{(45)}(1)$  para regra 45.



(b)  $D^{(180)}(0)$  e  $D^{(180)}(1)$  para regra 180.

Figura 28: GDBm's das regras 45 e 180.

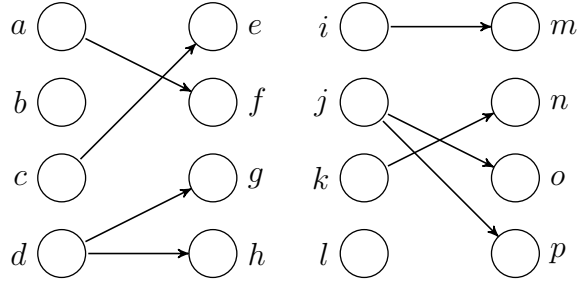
Analisando os grafos das regras 45 e 180, observa-se que o GDBm  $D^{(45)}(0)$  é exatamente o inverso de  $D^{(180)}(0)$  e o mesmo acontece com  $D^{(45)}(1)$  e  $D^{(180)}(1)$ , indicando que há isomorfismo entre os GDBm's das regras. Se todas as configurações possíveis de um reticulado  $C$  de tamanho  $L$  forem testadas, a quantidade de pré-imagens obtidas pelo algoritmo será exatamente a mesma para as duas regras.

Dois grafos  $G_1(V_1, E_1)$  e  $G_2(V_2, E_2)$  em que  $V$  é o conjunto de vértices e  $E$  o conjunto de arestas, são isomorfos se existem as funções bijetoras:  $f_{iso} : v_1 \rightarrow v_2, v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$  e  $g_{iso} : e_1 \rightarrow e_2, e_1 \in E_1, e_2 \in E_2$ . Para existir isomorfismo entre duas regras  $R_1$  e  $R_2$  deve existir isomorfismo entre os GDBm's  $D^{(R_1)}(s_i)$  e  $D^{(R_2)}(s_i)$ :

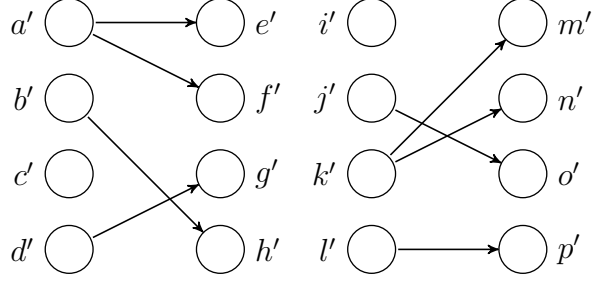
$$GDBm^{(R_1)} \simeq GDBm^{(R_2)} \longrightarrow \begin{cases} \exists \text{ isomorfismo} & D^{(R_1)}(0) \simeq D^{(R_2)}(0) \text{ e } D^{(R_1)}(1) \simeq D^{(R_2)}(1); \\ \exists \text{ isomorfismo} & D^{(R_1)}(0) \simeq D^{(R_2)}(1) \text{ e } D^{(R_1)}(1) \simeq D^{(R_2)}(0); \\ \nexists \text{ isomorfismo} & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Para demonstrar que existe isomorfismo entre os GDBm's das regras 45 e 180, os vértices dos grafos da Figura 28 são renomeados na Figura 29 abaixo.





(a)  $D^{(45)}(0)$  e  $D^{(45)}(1)$ .



(b)  $D^{(180)}(0)$  e  $D^{(180)}(1)$ .

Figura 29: Isomorfismo dos GDBm's das regras 45 e 180.

Se  $D^{(45)}(0)$  é um grafo  $D^{(45)}(0)(V_1, E_1)$  em que  $V_1 = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$  são os vértices e  $E_1 = \{a \rightarrow f, c \rightarrow e, d \rightarrow g, d \rightarrow h\}$  são as arestas,  $D^{(180)}(0)$  é um grafo  $D^{(180)}(0)(V_2, E_2)$  em que  $V_2 = \{a', b', c', d', e', f', g', h'\}$  são os vértices e  $E_2 = \{a' \rightarrow e', a' \rightarrow f', b' \rightarrow h', d' \rightarrow g'\}$  são as arestas; então para todo  $v_1 \in V_1$  existe  $f_{iso} : v_1 \rightarrow v_2$  em que  $v_2 \in V_2$ , e para todo  $e_1 \in E_1$  existe  $g_{iso} : e_1 \rightarrow e_2$  em  $e_2 \in E_2$ .

$$\begin{aligned}
 f_{iso}(a) &= d' & f_{iso}(e) &= h' & g_{iso}(a \rightarrow f) &= d' \rightarrow g' \\
 f_{iso}(b) &= c' & f_{iso}(f) &= g' & g_{iso}(c \rightarrow e) &= b' \rightarrow h' \\
 f_{iso}(c) &= b' & f_{iso}(g) &= f' & g_{iso}(d \rightarrow g) &= a' \rightarrow f' \\
 f_{iso}(d) &= a' & f_{iso}(h) &= e' & g_{iso}(d \rightarrow h) &= a' \rightarrow e'
 \end{aligned}$$

Se  $D^{(45)}(1)$  é um grafo  $D^{(45)}(1)(V_3, E_3)$  em que  $V_3 = \{i, j, k, l, m, n, o, p\}$  são os vértices e  $E_3 = \{i \rightarrow m, j \rightarrow o, j \rightarrow p, k \rightarrow n\}$  são as arestas,  $D^{(180)}(1)$  é um grafo  $D^{(180)}(1)(V_4, E_4)$  em que  $V_4 = \{i', j', k', l', m', n', o', p'\}$  são os vértices e  $E_4 = \{l' \rightarrow p', k' \rightarrow n', k' \rightarrow m', j' \rightarrow o'\}$  são as arestas; então para todo  $v_3 \in V_3$  existe  $f_{iso} : v_3 \rightarrow v_4$  em que  $v_4 \in V_4$ , e para todo  $e_3 \in E_3$  existe  $g_{iso} : e_3 \rightarrow e_4$  em  $e_4 \in E_4$ .

$$\begin{aligned}
f_{iso}(i) = l' & \quad f_{iso}(m) = p' & \quad g_{iso}(i \rightarrow m) = l' \rightarrow p' \\
f_{iso}(j) = k' & \quad f_{iso}(n) = o' & \quad g_{iso}(j \rightarrow o) = k' \rightarrow n' \\
f_{iso}(k) = j' & \quad f_{iso}(o) = n' & \quad g_{iso}(j \rightarrow p) = k' \rightarrow m' \\
f_{iso}(l) = i' & \quad f_{iso}(p) = m' & \quad g_{iso}(k \rightarrow n) = j' \rightarrow o'
\end{aligned}$$

O isomorfismo entre  $GDBm^{(45)} \simeq GDBm^{(180)}$  demonstra que por meio da operação  $\mathcal{NC}$  é obtida uma regra que possui o mesmo padrão de pré-imagem. Entretanto, o isomorfismo é uma condição suficiente mas não necessária para que duas regras possuam o mesmo padrão de pré-imagem, conforme se verifica pela operação de reflexão. A Figura 30 ilustra os GDBm's das regras 45 e 101, equivalentes por reflexão.

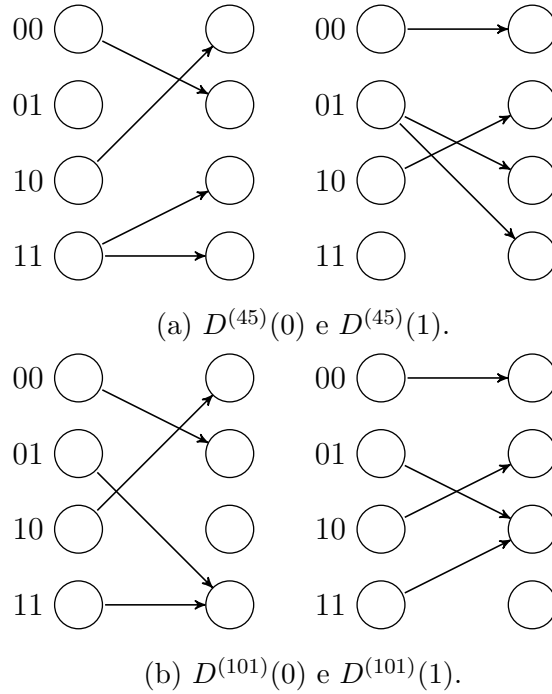


Figura 30: GDBm's das regras 45 e 101.

As regras equivalentes dinâmicas da regra 45 são as regras 75, 89 e 101 e, portanto, possuem o mesmo padrão de pré-imagem. A regra equivalente por reflexão da regra 45 é a regra 101, o GDBm da regra 45 não é isomorfo ao GDBm da regra 101, já que  $D^{(45)}(0) \not\cong D^{(180)}(0)$  e  $D^{(45)}(0) \not\cong D^{(180)}(1)$  e  $D^{(45)}(1) \not\cong D^{(180)}(1)$  e  $D^{(45)}(1) \not\cong D^{(180)}(0)$ .

## 5 CONCLUSÃO

Neste trabalho foi possível caracterizar a reversibilidade definindo uma grandeza que representa o nível de reversibilidade de uma regra em qualquer evolução temporal no espaço elementar até  $L_{max}$ ; também foi definida uma operação que obtém parcialmente as classes de reversibilidade parcial por meio da definição da regra sem a necessidade do cálculo do padrão de pré-imagem.

No Capítulo 3 deste trabalho foi questionado se a ordenação lexicográfica era a melhor forma de diferenciar quais regras são mais ou menos reversíveis, e foi visto que a ordenação lexicográfica despreza quantidades de pré-imagens em sua comparação a menos que os padrões de pré-imagens sejam idênticos. Ao desprezar informações contidas no padrão de pré-imagem, a ordenação lexicográfica não abstrai o tamanho do reticulado fazendo com que a reversibilidade parcial não surja como propriedade da regra.

Para manter a abstração do reticulado foi proposta uma função,  $\delta_R$ , que realiza o cálculo do nível de reversibilidade de uma regra com base em todas as informações contidas em seu padrão de pré-imagem. O retorno desta função é um valor numérico que representa o nível de reversibilidade da regra, em uma escala de 0 a 100; essa grandeza mantém a abstração do tamanho do reticulado, já que em seu cálculo todas as quantidades de pré-imagens são levadas em consideração.

Em seguida, a função  $\delta_R$  foi aplicada em todas as regras do espaço elementar e a ordenação relativa foi plotada no gráfico da Figura 25. O resultado da ordenação relativa foi semelhante ao obtido por de Oliveira e Freitas (2010), porém com algumas diferenças, por exemplo, o fato de as PRCs {60} e {90} se afastaram das menos reversíveis ao invés de se aproximarem. Também foi possível analisar os níveis de reversibilidade individualmente das PRCs em função de  $L_{max}$ , o que não era possível anteriormente com a ordenação lexicográfica, já que ela provê apenas um método comparativo de análise.

Os cálculos foram limitados a  $L_{max} = 32$  devido ao alto tempo de processamento e grande espaço de armazenamento das informações; com isso não foi possível verificar empiricamente em quais níveis as PRCs iriam estabilizar. Para verificar o nível de re-

versibilidade com  $L_{max}$  tendendo a infinito, os padrões de pré-imagens foram analisados por meio de seus padrões de formação. Para facilitar a análise, as PRCs foram divididas em três grupos:  $\approx$  PRCs, em que seus respectivos níveis são estáveis ou possuem uma variação periódica;  $\uparrow\downarrow$  PRCs, em que seus respectivos níveis tendem a 100; e  $\neg\uparrow\downarrow$  PRCs, em que seus respectivos níveis tendem a 0.

Para os grupos  $\approx$  e  $\uparrow\downarrow$  foi possível reescrever  $\delta_R$  em função de  $L_{max}$  (ao invés de  $\mathcal{P}_R$ ), o que permitiu calcular seus limites com  $L_{max}$  tendendo a infinito, e pôde ser verificado quais regras são reversíveis ou tendem a ser reversíveis. Já no grupo  $\neg\uparrow\downarrow$  foi visto que os padrões de pré-imagens das PRCs não possuíam um padrão de formação em função de  $L_{max}$ , dado que, conforme  $L_{max}$  aumenta, novas quantidades de pré-imagens são adicionadas. Entretanto, com a análise dos componentes da equação foi possível demonstrar que seus níveis de reversibilidade tendem a 0 conforme o  $L_{max}$  aumenta.

Neste trabalho foi possível caracterizar a noção de reversibilidade parcial, por meio da definição da função  $\delta_R$ , que retorna o nível de reversibilidade de uma regra. A função abstrai o tamanho do reticulado fazendo com que a reversibilidade parcial surja como uma propriedade da regra, e provê uma clara interpretação para a propriedade definida.

Os níveis de reversibilidade das PRCs foram analisados individualmente e seus limites calculados com  $L_{max}$  tendendo a infinito, permitindo identificar as PRCs que tendem a ser reversíveis conforme o tamanho do reticulado aumenta.

No Capítulo 4, que resultou na publicação do artigo (CORREA; DE OLIVEIRA, 2015), verificou-se a existência de uma relação entre as regras de cada PRC; a relação encontrada entre as regras foi definida como a operação chamada de Conjugação da Vizinhança ( $\mathcal{NC} : R \rightarrow R$ ), a qual inverte os bits de cada vizinhança ( $0 \rightarrow 1$  e  $1 \rightarrow 0$ ) mantendo os bits de saída. Foi visto que por meio do isomorfismo dos GDBm's que as regras obtidas pela operação  $\mathcal{NC}$  sempre possuem o mesmo padrão de pré-imagem. O isomorfismo dos GDBm's é uma condição suficiente porém não necessária para se obter regras com o mesmo padrão de pré-imagem; isso é devido ao fato, conforme foi mostrado, de que existem regras que possuem o mesmo padrão de pré-imagem porém não possuem GDBm's isomorfos.

Ao aplicar a função  $\mathcal{NC}$  em cada representante das equivalentes dinâmicas no espaço elementar, o resultado obtido foi similar ao resultado apresentado por de Oliveira e Freitas (2010), visto que somente as classes,  $\{15, 51, 170, 204\}$ ,  $\{28, 50, 56, 76\}$  e  $\{3, 19, 136, 200\}$ , não se agruparam corretamente. Apesar de o resultado obtido com a função  $\mathcal{NC}$  não gerar corretamente as PRCs obtidas no Capítulo 3, as classes obtidas possuem o mesmo nível de reversibilidade, ou seja, as classes  $\{15, 51, 170, 204\}$ ,  $\{28, 50, 56, 76\}$  e  $\{3, 19, 136, 200\}$  agruparam-se da seguinte forma:  $\{15, 170\}$ ,  $\{51, 204\}$ ,  $\{28, 56\}$ ,  $\{50, 76\}$ ,  $\{3, 136\}$  e  $\{19, 200\}$  (Tabela 15).

A vantagem da operação  $\mathcal{NC}$  é que não há necessidade de calcular o padrão de pré-imagem para saber quais regras estão nas mesmas PRCs, ou seja, apenas com a operação  $\mathcal{NC}$  sabe-se quais regras possuem o mesmo padrão de pré-imagens independente do tamanho do reticulado.

O estudo da reversibilidade parcial pode ser continuado em vários aspectos, além das restrições que aqui foram adotadas. Assim, surgem como possibilidades de trabalhos futuros verificar o comportamento da reversibilidade parcial das regras para reticulados com condições de contorno não cíclicas, expandir a noção de reversibilidade parcial para regras fora do espaço elementar, aplicar a reversibilidade parcial em reticulado com dimensões maiores que 1 restringindo-se a quantidade de estados e/ou as próprias regras, e verificar se não existe uma operação que complemente a operação  $\mathcal{NC}$  para obter todas as PRCs.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BOYKETT, T. “Efficient exhaustive listings of reversible one dimensional cellular automata”. *Elsevier - Theoretical Computer Science*, v. 325, p. 215–247, 2004.
- CORREA, R.; DE OLIVEIRA, P. P. B. “Um modelo parcial de formação das classes de reversibilidade em autômatos celulares elementares”. *Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics*, Outubro 2015.
- DE OLIVEIRA, P. P. B. “Cellular automata package for Mathematica”. *Disponibilizado pelo autor*, 2015.
- DE OLIVEIRA, P. P. B.; FREITAS, R. “Relative Partial Reversibility of Elementary Cellular Automata”. In *J. Kari, N. Fatés T. Worsh, editors. Proceedings of Automata 2010: 16th International Workshop on Cellular Automata and Discrete Complex Systems, LORIA-INRIA, Nancy, France*, p. 195–208, 2010.
- FREITAS, R. da S. “*Explorando a Noção de Reversibilidade Parcial de Autômatos Celulares Elementares em Reticulados Cíclicos*”. Dissertação (Mestrado) — Universidade Presbiteriana Mackenzie, 2010.
- INOKUCHI, S. “*A study on Cellular Automata with Finite Cell Array*”. Tese (Doutorado) — Universidade de Kyushu, 2007.
- JEN, E. “Enumeration of Preimages in Cellular Automata”. *Complex Systems*, p. 421–456, 1989.
- JERAS, I.; DOBNIKAR, A. “Algorithms for computing preimages of cellular automata configurations”. *Elsevier - Physica D*, v. 233, p. 95–111, 2007.
- KARI, J. “Theory of cellular automata: A survey”. *Elsevier - Theoretical Computer Science*, v. 334, p. 3–33, 2005.
- KRONEMBERGER, G.; DE OLIVEIRA, P. P. B. “A Hipótese das Regras Primitivas e Derivadas, na Busca Construtiva por Autômatos Celulares Reversíveis”. In *Anais do X SBAI - Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente, SBA*, 2011.

MCINTOSH, H. V. “Linear Cellular Automata via DeBruijn Diagrams”. *Departamento de Aplicación de Microcomputadoras, Instituto de Ciencias Universidad Autónoma de Puebla*, 1991.

MCINTOSH, H. V. “Ancestors: Commentaries on *The Global Dynamics of Cellular Automata* by Andrew Wuensche and Mike Lesser (Addison-Wesley, 1992)”. Julho 1993. Disponível em: <<http://delta.cs.cinvestav.mx/~mcintosh/oldweb/wandl/wandl.html>>.

MORA, J. C. S. T.; VERGARA, S. V. C.; MARTÍNEZ, G. J.; MCINTOSH, H. V. “Procedures for calculating reversible one-dimensional cellular automata”. *Elsevier - Physica D*, v. 202, p. 134–141, 2005.

MORAAL, H. “Graph-theoretical characterization of invertible cellular automata”. *Elsevier - Physica D: Nonlinear Phenomena*, v. 141, p. 1–18, July 2000.

POWLEY, E. J. “*Global properties of cellular automata*”. Tese (Doutorado) — University of York Department of Computer Science, October 2009.

TOFFOLI, T.; MARGOLUS, N. “Invertible Cellular Automata: A review”. *Elsevier - Physica D*, v. 45, p. 229–253, 1994.

VOORHEES, B. “Predecessors of cellular automata states, II: pre-images of finite sequences”. *Physica D*, v. 73, p. 136–151, Maio 1994.

WOLFRAM, S. “*A new kind of science*”. [S.l.]: Wolfram Media, Inc., 2002.

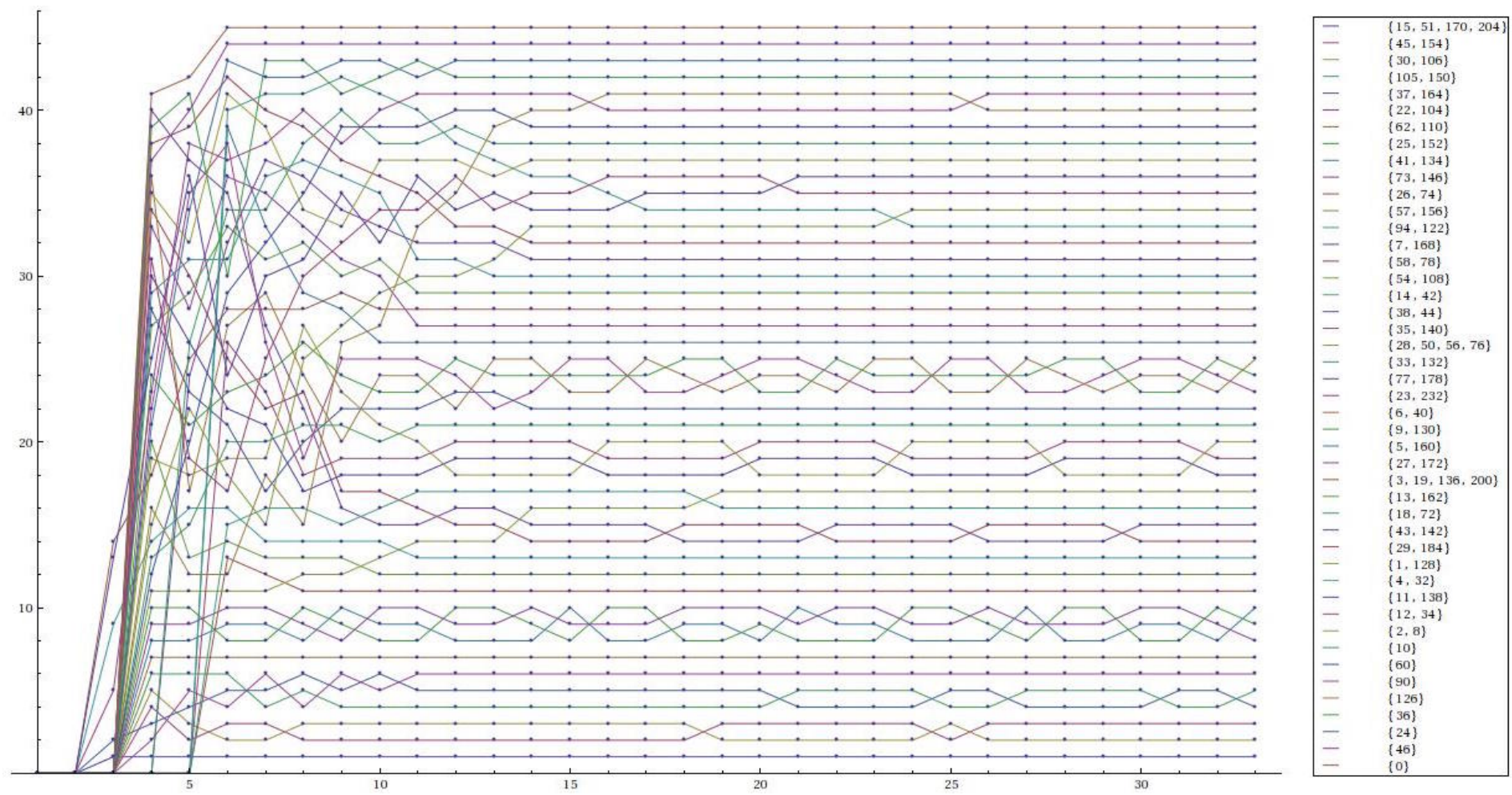
**APÊNDICE A - Ordenação lexicográfica do espaço elementar,  
para  $L_{max} = 18$  e  $L_{max} = 33$**

Ordenação Direta $L_{max} = 18$	Ordenação Absoluta $L_{max} = 18$	Ordenação Absoluta $L_{max} = 33$
{15, 51, 170, 204}	{15, 51, 170, 204}	{15, 51, 170, 204}
{45, 154}	{45, 154}	{45, 154}
{30, 106}	{30, 106}	{30, 106}
{37, 164}	{105, 150}	{105, 150}
{22, 104}	{22, 104}	{37, 164}
{62, 110}	{37, 164}	{22, 104}
{25, 152}	{62, 110}	{62, 110}
{41, 134}	{25, 152}	{25, 152}
{73, 146}	{41, 134}	{41, 134}
{26, 74}	{57, 156}	{73, 146}
{57, 156}	{73, 146}	{26, 74}
{94, 122}	{26, 74}	{57, 156}
{7, 168}	{94, 122}	{94, 122}
{58, 78}	{7, 168}	{7, 168}
{54, 108}	{58, 78}	{58, 78}
{14, 42}	{54, 108}	{54, 108}
{38, 44}	{14, 42}	{14, 42}
{35, 140}	{38, 44}	{38, 44}
{28, 50, 56, 76}	{35, 140}	{35, 140}
{23, 232}	{28, 50, 56, 76}	{28, 50, 56, 76}
{33, 132}	{23, 232}	{33, 132}
{6, 40}	{33, 132}	{77, 178}
{77, 178}	{77, 178}	{23, 232}
{9, 130}	{6, 40}	{6, 40}
{27, 172}	{9, 130}	{9, 130}
{3, 19, 136, 200}	{27, 172}	{5, 160}
{5, 160}	{3, 19, 136, 200}	{27, 172}
{13, 162}	{5, 160}	{3, 19, 136, 200}
{18, 72}	{13, 162}	{13, 162}
{29, 184}	{18, 72}	{18, 72}
{43, 142}	{29, 184}	{43, 142}
{1, 138}	{43, 142}	{29, 184}
{4, 32}	{1, 128}	{1, 128}
{11, 138}	{4, 32}	{4, 32}
{2, 8}	{11, 138}	{11, 138}
{60}	{2, 8}	{12, 34}
{90}	{12, 34}	{2, 8}
{36}	{10}	{10}
{126}	{60}	{60}
{12, 34}	{90}	{90}
{46}	{126}	{126}
{10}	{36}	{36}
{24}	{24}	{24}
{105, 150}	{46}	{46}
{0}	{0}	{0}



# APÊNDICE B - Ordenação lexicográfica absoluta do espaço elementar, para $L_{max} = 33$

89



## APÊNDICE C - Níveis de reversibilidade do espaço elementar, para $L_{max} = 32$

1		2		3	
PRC	$\delta$	PRC	$\delta$	PRC	$\delta$
{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 18, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 42, 44, 46, 50, 54, 56, 58, 60, 62, 72, 74, 76, 78, 90, 94, 104, 106, 108, 110, 122, 126}	25	{0, 2, 8, 10, 18, 24, 26, 72, 74, 90}	12,5	{0}	6,25
{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 19, 23, 25, 27, 29, 33, 35, 37, 41, 43, 45, 51, 57, 73, 77, 105, 128, 130, 132, 134, 136, 138, 140, 142, 146, 150, 152, 154, 156, 160, 162, 164, 168, 170, 172, 178, 184, 200, 204, 232}	100	{36, 38, 44, 46, 54, 60, 62, 108, 110, 126}	25	{126}	15,47
		{4, 6, 12, 14, 22, 28, 30, 32, 34, 40, 42, 50, 56, 58, 76, 78, 94, 104, 106, 122}	50	{10, 24, 90}	19,64
		{1, 3, 9, 11, 19, 25, 27, 37, 45, 73, 128, 130, 136, 138, 146, 152, 154, 164, 172, 200}	55,55	{36, 46, 60}	25
		{5, 7, 13, 15, 23, 29, 33, 35, 41, 43, 51, 57, 77, 105, 132, 134, 140, 142, 150, 156, 160, 162, 168, 170, 178, 184, 204, 232}	100	{22, 104}	25,23
				{2, 8, 18, 72}	28,21
				{1, 128}	31,97
				{12, 34, 58, 78}	35,71
				{54, 62, 108, 110}	38,09
				{4, 6, 32, 40}	44,28
				{23, 105, 150, 232}	46,42
				{11, 25, 30, 37, 94, 106, 122, 138, 152, 164}	48,80
				{26, 74}	51,78
				{3, 9, 19, 73, 130, 136, 146, 200}	54,16
				{38, 44}	57,14
				{13, 14, 28, 35, 42, 50, 56, 76, 140, 162}	67,85
				{5, 7, 33, 41, 132, 134, 160, 168}	73,21
				{27, 45, 154, 172}	80,95
				{15, 29, 43, 51, 57, 77, 142, 156, 170, 178, 184, 204}	100

4		5		6		7		8	
PRC	$\delta$	PRC	$\delta$	PRC	$\delta$	PRC	$\delta$	PRC	$\delta$
{0}	3,125	{0}	1,5625	{0}	0,78125	{0}	0,3906	{0}	0,1953
{90}	12,50	{2, 8}	11,948	{2, 8}	8,982	{2,8}	6,0766	{2,8}	3,6971
{126}	16,11	{46}	16,263	{24}	11,309	{24}	8,7926	{46}	6,4648
{46}	19,44	{24}	16,532	{46}	11,931	{46}	9,1010	{24}	6,5980
{24}	20,00	{126}	16,827	{90}	12,500	{10}	9,9737	{12,34}	7,6413
{2, 8}	20,25	{36}	18,145	{10}	13,690	{12,34}	10,872	{10}	7,8485
{36}	20,55	{90}	18,951	{12, 34}	15,502	{36}	14,304	{36}	12,389
{60}	25,00	{12, 34}	21,102	{126}	17,050	{126}	14,640	{90}	12,500
{12, 34}	29,444	{10}	21,370	{36}	17,698	{18,72}	16,625	{126}	12,557
{10}	30,00	{18, 72}	22,836	{18, 72}	18,024	{90}	18,799	{4,32}	15,606
{18, 72}	30,25	{60}	25,00	{60}	25,00	{4,32}	20,044	{18,72}	15,800
{1, 128}	31,890	{4, 32}	32,030	{4, 32}	25,708	{1,128}	22,403	{1,128}	16,677
{9, 130}	34,166	{1, 128}	33,249	{1, 128}	29,079	{60}	25,000	{11,138}	21,127
{5, 160}	40,092	{9, 130}	37,231	{37, 164}	31,356	{11,138}	26,279	{60}	25,000
{94, 122}	40,833	{37, 164}	37,956	{11, 138}	32,870	{5,160}	31,475	{9,130}	29,243
{4, 32}	41,00	{11, 13, 138, 162}	40,860	{5, 160}	34,667	{6,40}	32,019	{3,19,136,200}	29,397
{62, 110}	41,11	{5, 160}	41,320	{13, 162}	36,177	{9,130}	32,316	{13,162}	29,696
{37, 164}	41,22	{77, 178}	41,505	{9, 130}	36,706	{13,162}	33,293	{6,40}	30,099
{23, 232}	43,00	{6, 40}	45,445	{94, 122}	39,166	{3,19,136,200}	34,504	{77,178}	30,920
{22, 104}	45,666	{33, 132}	45,618	{6, 40}	39,497	{94,122}	35,299	{23,232}	31,110
{11, 13, 58, 78, 138, 162}	47,222	{73, 146}	46,908	{3, 19, 136, 200}	40,771	{37,164}	36,896	{5,160}	32,066
{38, 44}	50,00	{94, 122}	47,446	{73, 146}	40,806	{33,132}	37,381	{37,164}	32,822
{30, 106}	51,111	{3, 19, 136, 200}	0,48898	{33, 132}	41,177	{77,178}	39,475	{33,132}	33,049
{33, 132}	51,50	{62, 110}	49,247	{77, 178}	42,804	{23,232}	39,855	{94,122}	36,606
{6, 40}	54,555	{58, 78}	50,537	{105, 150}	46,428	{27,172}	43,963	{27,172}	37,908
{26, 74}	55,00	{38, 44}	51,881	{23, 232}	48,756	{43,142}	44,488	{29,184}	39,631
{3, 19, 136, 200}	55,753	{23, 232}	53,602	{38, 44}	48,941	{73,146}	44,570	{43,142}	39,785
{25, 152}	57,222	{14, 42}	56,720	{27, 172}	50,00	{38,44}	45,236	{38,44}	41,091
{73, 146}	59,722	{27, 57, 156, 172}	57,526	{62, 110}	50,185	{28,50,56,76}	46,948	{28,50,56,76}	41,314
{14, 42}	60,00	{25, 28, 50, 56, 76, 152}	57,795	{26, 74}	50,595	{14,42}	47,007	{14,42}	42,267
{54, 108}	61,111	{43, 142}	58,602	{22, 104}	51,005	{29,184}	47,178	{73,146}	42,607
{27, 28, 50, 56, 57, 76, 156, 172}	62,222	{35, 140}	58,870	{43, 142}	51,058	{62,110}	49,032	{26,74}	46,045
{43, 142}	64,444	{54, 108}	58,924	{58, 78}	52,447	{22,104}	49,670	{35,140}	47,058
{35, 140}	65,00	{41, 134}	60,080	{14, 42}	52,513	{25,152}	50,164	{58,78}	47,111
{41, 134}	67,50	{30, 106}	61,827	{28, 50, 56, 76}	53,042	{58,78}	50,190	{62,110}	47,544
{77, 178}	68,00	{22, 104}	62,649	{25, 152}	53,703	{54,108}	51,001	{54,108}	48,132
{7, 168}	71,50	{26, 74}	63,709	{54, 108}	54,153	{26,74}	51,017	{41,134}	48,758
{45, 154}	72,222	{7, 168}	64,704	{29, 184}	56,481	{35,140}	51,574	{25,152}	48,996
{105, 150}	75,00	{29, 184}	67,204	{35, 140}	56,547	{7,168}	54,770	{7,168}	49,888
{29, 184}	82,222	{45, 154}	86,559	{57, 156}	58,862	{41,134}	56,036	{22,104}	52,197
{15, 51, 170, 204}	100	{105, 150}	87,903	{41, 134}	59,523	{57,156}	56,627	{57,156}	55,644
		{15, 51, 170, 204}	100	{7, 168}	60,489	{30,106}	70,734	{30,106}	75,718
				{30, 106}	67,195	{105,150}	73,425	{105,150}	86,764
				{45, 154}	84,126	{45,154}	92,125	{45,154}	91,437
				{15, 51, 170, 204}	100	{15,51,170,204}	100	{15,51,170,204}	100

9		10		11		12		13		14	
PRC	$\delta$	PRC	$\delta$	PRC	$\delta$	PRC	$\delta$	PRC	$\delta$	PRC	$\delta$
{0}	0,097656	{0}	0,04882	{0}	0,024414	{0}	0,01220	{0}	0,006103	{0}	0,00305
{2,8}	2,402351	{2,8}	1,54474	{2,8}	0,943737	{2,8}	0,58576	{2,8}	0,365354	{2,8}	0,22275
{46}	4,684015	{24}	3,24556	{24}	2,286670	{46}	1,57934	{46}	1,092202	{46}	0,74597
{24}	4,750489	{46}	3,26249	{46}	2,295131	{24}	1,59948	{24}	1,102273	{24}	0,74787
{12,34}	5,271099	{10}	3,56746	{10}	2,447542	{12,34}	1,68923	{12,34}	1,147140	{12,34}	0,77801
{10}	5,374537	{12,34}	3,62906	{12,34}	2,478326	{10}	1,73143	{10}	1,168240	{10}	0,78349
{126}	10,82960	{4,32}	9,20562	{4,32}	7,034116	{4,32}	5,36800	{4,32}	4,088914	{4,32}	3,11259
{36}	10,90702	{126}	9,48882	{1,128}	7,975842	{1,128}	6,18198	{1,128}	4,738084	{1,128}	3,63331
{4,32}	11,99230	{36}	9,52749	{126}	8,222681	{126}	7,14184	{36}	6,177042	{36}	5,35018
{1,128}	12,79717	{1,128}	10,1126	{36}	8,227815	{36}	7,14441	{126}	6,190794	{126}	5,35705
{18,72}	14,24531	{18,72}	12,4262	{11,138}	10,769486	{11,138}	8,56439	{11,138}	6,813288	{11,138}	5,41707
{11,138}	16,96917	{90}	12,5000	{18,72}	10,803767	{18,72}	9,43219	{18,72}	8,225409	{18,72}	7,13685
{90}	18,76223	{11,138}	13,5335	{3,19,136,200}	17,439609	{90}	12,50000	{5,160}	12,166895	{5,160}	10,09746
{3,19,136,200}	24,81006	{3,19,136,200}	20,8038	{5,160}	18,080507	{5,160}	14,45118	{3,19,136,200}	12,253476	{3,19,136,200}	10,25924
{60}	25,00000	{13,162}	21,6474	{13,162}	18,089475	{3,19,136,200}	14,62437	{13,162}	12,634329	{13,162}	10,60063
{9,130}	25,49207	{9,130}	21,8339	{9,130}	18,401801	{13,162}	15,10079	{9,130}	12,793958	{9,130}	10,72976
{13,162}	25,61177	{5,160}	22,0862	{90}	18,753053	{9,130}	15,32435	{6,40}	14,003490	{6,40}	11,86276
{5,160}	26,14200	{6,40}	22,9287	{6,40}	19,393172	{6,40}	16,49198	{23,232}	14,711688	{90}	12,50000
{6,40}	26,70642	{33,132}	24,3341	{77,178}	20,329273	{77,178}	17,19648	{33,132}	14,876877	{23,232}	12,53461
{77,178}	27,35615	{77,178}	24,7255	{33,132}	20,632135	{33,132}	17,49752	{77,178}	15,013525	{33,132}	12,67058
{23,232}	27,72973	{23,232}	24,9121	{23,232}	21,419531	{23,232}	17,74148	{43,142}	17,780960	{77,178}	12,68552
{33,132}	28,55806	{60}	25,0000	{29,184}	24,278233	{43,142}	20,70789	{29,184}	17,813221	{43,142}	15,26550
{27,172}	33,20287	{29,184}	28,4734	{43,142}	24,390687	{29,184}	20,77242	{90}	18,750763	{29,184}	15,30378
{29,184}	33,53415	{43,142}	28,6985	{27,172}	24,989415	{27,172}	21,68335	{27,172}	18,836154	{27,172}	16,35067
{43,142}	33,61103	{27,172}	28,7227	{60}	25,000000	{28,50,56,76}	24,13022	{28,50,56,76}	21,098679	{28,50,56,76}	18,46032
{94,122}	35,94702	{28,50,56,76}	31,6100	{28,50,56,76}	27,610694	{60}	25,00000	{38,44}	23,332938	{38,44}	20,67926
{28,50,56,76}	36,20235	{38,44}	33,1642	{38,44}	29,596195	{38,44}	26,29188	{14,42}	23,387877	{14,42}	20,71131
{38,44}	37,14798	{14,42}	33,5308	{14,42}	29,779390	{14,42}	26,40177	{60}	25,000000	{35,140}	24,60343
{37,164}	37,22926	{37,164}	34,7327	{94,122}	32,767699	{35,140}	30,56089	{35,140}	27,417287	{60}	25,00000
{14,42}	37,73506	{94,122}	35,0041	{35,140}	34,031509	{94,122}	31,22401	{54,108}	28,765793	{54,108}	25,81442
{73,146}	40,84404	{35,140}	37,9582	{54,108}	35,535518	{54,108}	32,03007	{94,122}	29,146546	{58,78}	26,86825
{35,140}	42,20890	{54,108}	39,4679	{58,78}	36,078063	{58,78}	32,77026	{58,78}	29,689925	{94,122}	27,32175
{58,78}	43,29931	{58,78}	39,6345	{73,146}	36,556279	{7,168}	33,49375	{7,168}	30,298310	{7,168}	27,41045
{54,108}	43,84633	{73,146}	39,8245	{7,168}	37,001474	{73,146}	34,73841	{73,146}	32,430826	{73,146}	30,29120
{22,104}	44,60596	{26,74}	40,2818	{37,164}	37,444274	{26,74}	35,29100	{26,74}	33,483500	{26,74}	30,46099
{41,134}	44,78147	{7,168}	40,8968	{26,74}	38,812489	{37,164}	36,02688	{41,134}	34,447128	{41,134}	31,84123
{7,168}	45,11241	{41,134}	42,6645	{41,134}	39,251750	{41,134}	36,61558	{25,152}	35,944903	{57,156}	33,14088
{26,74}	45,18917	{22,104}	43,3849	{25,152}	40,851943	{25,152}	38,45825	{57,156}	36,084291	{25,152}	33,55971
{25,152}	46,25081	{25,152}	43,5457	{62,110}	42,785306	{57,156}	39,50950	{37,164}	37,723544	{62,110}	35,81097
{105,150}	46,42857	{62,110}	44,8906	{57,156}	43,449377	{62,110}	40,44900	{62,110}	38,116800	{37,164}	36,47985
{62,110}	46,45885	{57,156}	47,6409	{22,104}	45,201209	{22,104}	41,28487	{22,104}	39,456373	{22,104}	39,42883
{57,156}	52,23930	{105,150}	73,2404	{30,106}	85,112359	{105,150}	46,42857	{105,150}	73,217555	{105,150}	86,60959
{30,106}	79,54990	{30,106}	82,3802	{105,150}	86,626770	{30,106}	87,43386	{30,106}	89,304317	{30,106}	90,93063
{45,154}	95,72733	{45,154}	95,5360	{45,154}	97,769092	{45,154}	97,71672	{45,154}	98,858503	{45,154}	98,84433
{15,51,170,204}	100,0000	{15,51,170,204}	100,000	{15,51,170,204}	100,00000	{15,51,170,204}	100,0000	{15,51,170,204}	100,00000	{15,51,170,204}	100,0000

15		16		17		18		19	
PRC	$\delta$	PRC	$\delta$	PRC	$\delta$	PRC	$\delta$	PRC	$\delta$
{0}	0,001525	{0}	0,0007629	{0}	0,000381	{0}	0,00019073	{0}	0,00009536
{2,8}	0,135968	{2,8}	0,0833972	{2,8}	0,050678	{2,8}	0,03072841	{2,8}	0,01868177
{46}	0,510741	{46}	0,3472295	{46}	0,236341	{46}	0,16022262	{46}	0,10867849
{24}	0,511693	{24}	0,3496250	{24}	0,237539	{24}	0,16063831	{24}	0,10888633
{12,34}	0,526763	{12,34}	0,3563849	{12,34}	0,240918	{12,34}	0,16279755	{12,34}	0,10996595
{10}	0,529503	{10}	0,3631019	{10}	0,244277	{10}	0,16448343	{10}	0,11080889
{4,32}	2,367609	{4,32}	1,8003300	{4,32}	1,368544	{4,32}	1,04015568	{4,32}	0,79046188
{1,128}	2,800343	{1,128}	2,1632236	{1,128}	1,668595	{1,128}	1,28425054	{1,128}	0,98771994
{11,138}	4,306265	{11,138}	3,4226174	{11,138}	2,720524	{11,138}	2,16236692	{11,138}	1,71875479
{36}	4,617257	{36}	3,9765652	{36}	3,420994	{36}	2,93958947	{36}	2,52100786
{126}	4,617466	{126}	3,9766699	{126}	3,421308	{126}	2,93974646	{126}	2,52138165
{18,72}	6,161470	{18,72}	5,3006800	{18,72}	4,549142	{18,72}	3,89632926	{18,72}	3,33062577
{5,160}	8,507090	{3,19,136,200}	7,1888347	{3,19,136,200}	6,017146	{3,19,136,200}	5,03600811	{3,19,136,200}	4,21471208
{3,19,136,200}	8,587979	{5,160}	7,2135687	{5,160}	6,029512	{5,160}	5,06310664	{5,160}	4,22826132
{13,162}	8,909031	{13,162}	7,4890171	{13,162}	6,292322	{13,162}	5,28346710	{13,162}	4,43442618
{9,130}	9,026718	{9,130}	7,6027855	{9,130}	6,398326	{9,130}	5,38019942	{9,130}	4,52139527
{6,40}	10,016073	{6,40}	8,4745797	{6,40}	7,178703	{6,40}	6,08004126	{6,40}	5,14659276
{77,178}	10,719133	{33,132}	9,1997271	{33,132}	7,834223	{77,178}	6,65081726	{23,232}	5,65898758
{33,132}	10,797895	{77,178}	9,2269532	{77,178}	7,856274	{23,232}	6,65450527	{33,132}	5,67611984
{23,232}	10,816141	{23,232}	9,2754564	{23,232}	7,863650	{33,132}	6,66897623	{77,178}	5,67693717
{43,142}	13,146900	{29,184}	11,337730	{29,184}	9,770098	{29,184}	8,42339846	{29,184}	7,26482905
{29,184}	13,166041	{43,142}	11,337750	{43,142}	9,770108	{43,142}	8,42582742	{43,142}	7,26604353
{27,172}	14,201147	{27,172}	12,330011	{27,172}	10,707744	{27,172}	9,29809067	{27,172}	8,07451144
{28,50,56,76}	16,159832	{90}	12,500000	{28,50,56,76}	12,395594	{28,50,56,76}	10,86000532	{28,50,56,76}	9,51595765
{38,44}	18,318227	{28,50,56,76}	14,151109	{38,44}	14,356475	{90}	12,50000000	{38,44}	11,24441204
{14,42}	18,334249	{38,44}	16,218112	{14,42}	14,361052	{38,44}	12,70592443	{14,42}	11,24569951
{90}	18,750190	{14,42}	16,227267	{35,140}	17,753009	{14,42}	12,70849936	{35,140}	14,28007524
{35,140}	22,068077	{35,140}	19,794646	{90}	18,750047	{35,140}	15,92239552	{54,108}	15,17468487
{54,108}	23,188590	{54,108}	20,850396	{54,108}	18,751340	{54,108}	16,86641559	{58,78}	16,19037529
{58,78}	24,292844	{58,78}	21,956028	{58,78}	19,838457	{58,78}	17,92273539	{7,168}	16,59433184
{7,168}	24,793099	{7,168}	22,426258	{7,168}	20,284241	{7,168}	18,34690962	{90}	18,75001192
{60}	25,000000	{94,122}	23,731425	{94,122}	22,065086	{94,122}	20,45146227	{94,122}	18,96491379
{94,122}	25,541911	{60}	25,000000	{26,74}	24,365094	{26,74}	22,33716728	{26,74}	20,72019633
{73,146}	28,395123	{26,74}	26,140825	{73,146}	24,479791	{73,146}	22,63626982	{73,146}	20,90783456
{26,74}	28,577912	{73,146}	26,303042	{60}	25,000000	{41,134}	23,51315237	{57,156}	21,73154785
{41,134}	29,534164	{41,134}	27,474007	{41,134}	25,388931	{57,156}	23,66953773	{41,134}	21,79352515
{57,156}	30,471710	{57,156}	28,029563	{57,156}	25,770079	{60}	25,00000000	{25,152}	23,21513247
{25,152}	31,256323	{25,152}	29,084259	{25,152}	27,006848	{25,152}	25,05359150	{60}	25,00000000
{62,110}	33,526117	{62,110}	31,292626	{62,110}	29,150779	{62,110}	27,12076359	{62,110}	25,20657588
{22,104}	36,918770	{22,104}	35,292251	{22,104}	34,690407	{22,104}	32,97238152	{22,104}	31,54145778
{37,164}	36,995158	{37,164}	35,650879	{37,164}	35,302656	{37,164}	33,77377041	{37,164}	32,90837796
{105,150}	46,428571	{105,150}	73,214694	{105,150}	86,607449	{105,150}	46,42857142	{105,150}	73,21433680
{30,106}	92,323323	{30,106}	93,487195	{30,106}	94,476530	{30,106}	95,31915786	{30,106}	96,03137213
{45,154}	99,422182	{45,154}	99,418376	{45,154}	99,709190	{45,154}	99,70817454	{45,154}	99,85408755
{15,51,170,204}	100,000000	{15,51,170,204}	100,000000	{15,51,170,204}	100,000000	{15,51,170,204}	100,00000000	{15,51,170,204}	100,00000000

20		21		22		23		24	
PRC	$\delta$	PRC	$\delta$	PRC	$\delta$	PRC	$\delta$	PRC	$\delta$
{0}	0,0000476	{0}	0,0000238	{0}	0,0000119	{0}	$5,9604 \times 10^{-6}$	{0}	$2,9802 \times 10^{-6}$
{2,8}	0,0113184	{2,8}	0,0068426	{2,8}	0,0041412	{2,8}	0,002503	{2,8}	0,001511
{46}	0,0735487	{46}	0,0497864	{46}	0,0336578	{46}	0,022756	{46}	0,015374
{24}	0,0737970	{24}	0,0499106	{24}	0,0337099	{24}	0,022782	{24}	0,015398
{12,34}	0,0742640	{12,34}	0,0501441	{12,34}	0,0338545	{12,34}	0,022854	{12,34}	0,015428
{10}	0,0752094	{10}	0,0506168	{10}	0,0341358	{10}	0,022995	{10}	0,015552
{4,32}	0,6006653	{4,32}	0,4564153	{4,32}	0,3467960	{4,32}	0,263498	{4,32}	0,200205
{1,128}	0,7600761	{1,128}	0,5852631	{1,128}	0,4506839	{1,128}	0,346948	{1,128}	0,267031
{11,138}	1,3661208	{11,138}	1,0858567	{11,138}	0,8630886	{11,138}	0,686028	{11,138}	0,545291
{36}	2,1593527	{36}	1,8472868	{36}	1,5784296	{36}	1,347172	{36}	1,148616
{126}	2,1595396	{126}	1,8473185	{126}	1,5784454	{126}	1,347185	{126}	1,148622
{18,72}	2,8415393	{18,72}	2,4199754	{18,72}	2,0577796	{18,72}	1,747443	{18,72}	1,482111
{5,160}	3,5262305	{5,160}	2,9514728	{5,160}	2,4667857	{5,160}	2,065684	{5,160}	1,730283
{3,19,136,200}	3,5273264	{3,19,136,200}	2,9520207	{3,19,136,200}	2,4705245	{3,19,136,200}	2,067554	{3,19,136,200}	1,730309
{13,162}	3,7211895	{13,162}	3,1226998	{13,162}	2,6206769	{13,162}	2,199518	{13,162}	1,846107
{9,130}	3,7984334	{9,130}	3,1908685	{9,130}	2,6805821	{9,130}	2,252109	{9,130}	1,892286
{6,40}	4,3564311	{6,40}	3,6880315	{6,40}	3,1222113	{6,40}	2,642871	{6,40}	2,237039
{23,232}	4,8297578	{77,178}	4,1083496	{77,178}	3,4985678	{23,232}	2,978308	{23,232}	2,534098
{33,132}	4,8310239	{33,132}	4,1119465	{33,132}	3,5000610	{33,132}	2,979293	{77,178}	2,535638
{77,178}	4,8387326	{23,232}	4,1187647	{23,232}	3,5037753	{77,178}	2,981388	{33,132}	2,536012
{43,142}	6,2670066	{43,142}	5,4072944	{43,142}	4,6657964	{43,142}	4,026601	{43,142}	3,475181
{29,184}	6,2671269	{29,184}	5,4073545	{29,184}	4,6660757	{29,184}	4,026741	{29,184}	3,475199
{27,172}	7,0117810	{27,172}	6,0890662	{27,172}	5,2877284	{27,172}	4,591889	{27,172}	3,987609
{28,50,56,76}	8,3390594	{28,50,56,76}	7,3081938	{28,50,56,76}	6,4050449	{28,50,56,76}	5,613673	{28,50,56,76}	4,920176
{38,44}	9,9503311	{38,44}	8,8049475	{38,44}	7,7912241	{38,44}	6,894147	{38,44}	6,100306
{14,42}	9,9510463	{14,42}	8,8053051	{14,42}	7,7914208	{14,42}	6,894245	{14,42}	6,100360
{90}	12,5000000	{35,140}	11,4862539	{35,140}	10,3015025	{35,140}	9,238913	{35,140}	8,285933
{35,140}	12,8072830	{54,108}	12,2872843	{54,108}	11,0568258	{54,108}	9,949780	{54,108}	8,953721
{54,108}	13,6547290	{58,78}	13,2099688	{58,78}	11,9318789	{58,78}	10,77732	{58,78}	9,734428
{58,78}	14,6247029	{7,168}	13,5753777	{7,168}	12,2785460	{7,168}	11,10558	{7,168}	10,044670
{7,168}	15,0091785	{94,122}	16,2136984	{90}	12,5000000	{94,122}	13,79077	{90}	12,500000
{94,122}	17,5489044	{26,74}	17,5848450	{94,122}	14,9630104	{26,74}	14,89424	{94,122}	12,703152
{26,74}	19,0205818	{73,146}	17,7527761	{26,74}	16,1480184	{73,146}	15,01307	{26,74}	13,679024
{73,146}	19,2947125	{57,156}	18,3147173	{73,146}	16,3393522	{57,156}	15,44195	{73,146}	13,790873
{57,156}	19,9497143	{41,134}	18,5947777	{57,156}	16,8163046	{41,134}	15,85280	{57,156}	14,180422
{41,134}	20,1268935	{90}	18,7500029	{41,134}	17,1830025	{25,152}	16,99989	{41,134}	14,625141
{25,152}	21,4959047	{25,152}	19,8886526	{25,152}	18,3920281	{62,110}	18,68655	{25,152}	15,707633
{62,110}	23,4076715	{62,110}	21,7232270	{62,110}	20,1509735	{90}	18,75000	{62,110}	17,324376
{60}	25,0000000	{60}	25,0000000	{60}	25,0000000	{60}	25,00000	{60}	25,000000
{22,104}	30,6051813	{22,104}	29,1775531	{22,104}	27,8529373	{22,104}	26,78604	{22,104}	25,530279
{37,164}	31,3037234	{37,164}	30,1620639	{37,164}	28,5918701	{37,164}	27,34464	{37,164}	25,867388
{105,150}	86,6071811	{105,150}	46,4285714	{105,150}	73,2142921	{105,150}	86,60714	{105,150}	46,428571
{30,106}	96,6348854	{30,106}	97,1472567	{30,106}	97,5814793	{30,106}	97,94947	{30,106}	98,261556
{45,154}	99,8538174	{45,154}	99,9269087	{45,154}	99,9268372	{45,154}	99,96341	{45,154}	99,963399
{15,51,170,204}	100,0000000	{15,51,170,204}	100,0000000	{15,51,170,204}	100,0000000	{15,51,170,204}	100,00000	{15,51,170,204}	100,000000

25		26		27		28		29	
PRC	$\delta$	PRC	$\delta$	PRC	$\delta$	PRC	$\delta$	PRC	$\delta$
{0}	1,49011611 10 <sup>-6</sup>	{0}	7,45058059 10 <sup>-7</sup>	{0}	3,725290 10 <sup>-7</sup>	{0}	1,86264 10 <sup>-7</sup>	{0}	9,313225 10 <sup>-8</sup>
{2,8}	0,00091254	{2,8}	0,0005508	{2,8}	0,0003322	{2,8}	0,00020038	{2,8}	0,0001208
{46}	0,01038768	{46}	0,0070154	{46}	0,0047379	{46}	0,00319910	{46}	0,0021600
{24}	0,01039948	{24}	0,0070208	{24}	0,0047406	{24}	0,00320120	{24}	0,0021611
{12,34}	0,01041451	{12,34}	0,0070299	{12,34}	0,0047452	{12,34}	0,00320301	{12,34}	0,0021620
{10}	0,01047663	{10}	0,0070695	{10}	0,0047650	{10}	0,00321867	{10}	0,0021698
{4,32}	0,15211370	{4,32}	0,1155736	{4,32}	0,0878106	{4,32}	0,06671672	{4,32}	0,0506898
{1,128}	0,20552293	{1,128}	0,1581985	{1,128}	0,1217780	{1,128}	0,09374042	{1,128}	0,0721550
{11,138}	0,43342799	{11,138}	0,3445129	{11,138}	0,2738388	{11,138}	0,21766305	{11,138}	0,1730114
{36}	0,97836932	{36}	0,8326099	{36}	0,7079645	{36}	0,60150212	{36}	0,5106710
{126}	0,97837788	{126}	0,8326142	{126}	0,7079655	{126}	0,60150263	{126}	0,5106713
{18,72}	1,25566576	{18,72}	1,0627290	{18,72}	0,8986014	{18,72}	0,75918202	{18,72}	0,6409027
{5,160}	1,44805942	{3,19,136,200}	1,2118712	{3,19,136,200}	1,0141968	{3,19,136,200}	0,84876594	{3,19,136,200}	0,7103192
{3,19,136,200}	1,44807285	{5,160}	1,2124138	{5,160}	1,0144682	{5,160}	0,84880684	{5,160}	0,7103396
{13,162}	1,54948483	{13,162}	1,3005049	{13,162}	1,0915168	{13,162}	0,91610457	{13,162}	0,7688799
{9,130}	1,59001066	{9,130}	1,3360190	{9,130}	1,1225775	{9,130}	0,94321632	{9,130}	0,7925046
{6,40}	1,89358284	{6,40}	1,6028928	{6,40}	1,3568167	{6,40}	1,14850937	{6,40}	0,9721849
{77,178}	2,15795300	{33,132}	1,8374560	{33,132}	1,5640328	{77,178}	1,33107238	{23,232}	1,1329937
{23,232}	2,15823997	{77,178}	1,8379081	{77,178}	1,5641091	{23,232}	1,33125799	{33,132}	1,1331907
{33,132}	2,15866885	{23,232}	1,8380516	{23,232}	1,5644803	{33,132}	1,33129490	{77,178}	1,1332579
{43,142}	2,99930785	{29,184}	2,5886676	{29,184}	2,2342823	{29,184}	1,92843565	{29,184}	1,6644696
{29,184}	2,99931675	{43,142}	2,5886877	{43,142}	2,2342924	{43,142}	1,92843727	{43,142}	1,6644704
{27,172}	3,46286093	{27,172}	3,0071645	{27,172}	2,6114384	{27,172}	2,26778713	{27,172}	1,9693592
{28,50,56,76}	4,31240723	{28,50,56,76}	3,7797454	{28,50,56,76}	3,3128955	{28,50,56,76}	2,90371844	{28,50,56,76}	2,5450849
{14,42}	5,39788352	{14,42}	4,7762943	{14,42}	4,2262738	{38,44}	3,73959941	{38,44}	3,3089662
{38,44}	5,39785670	{38,44}	4,7762797	{38,44}	4,2262811	{14,42}	3,73960332	{14,42}	3,3089682
{35,140}	7,43124261	{35,140}	6,6647147	{35,140}	5,9772515	{35,140}	5,36070046	{35,140}	4,8077457
{54,108}	8,05741057	{54,108}	7,2508444	{54,108}	6,5250487	{54,108}	5,87192726	{54,108}	5,2841891
{58,78}	8,79241808	{58,78}	7,9415507	{58,78}	7,1730149	{58,78}	6,47884892	{58,78}	5,8518581
{7,168}	9,08510364	{7,168}	8,2172037	{7,168}	7,4322134	{7,168}	6,72221322	{7,168}	6,0800391
{94,122}	11,6912878	{94,122}	10,753569	{94,122}	9,8853593	{94,122}	9,08246149	{94,122}	8,3414323
{26,74}	12,5973096	{26,74}	11,569200	{26,74}	10,642898	{26,74}	9,77342888	{73,146}	8,9791023
{73,146}	12,6635332	{73,146}	11,622073	{73,146}	10,666687	{73,146}	9,78665022	{26,74}	8,9842124
{57,156}	13,0219681	{57,156}	11,957881	{57,156}	10,980530	{57,156}	10,0829685	{57,156}	9,2587562
{41,134}	13,4922590	{41,134}	12,437371	{41,134}	11,463084	{41,134}	10,5640812	{41,134}	9,7318125
{25,152}	14,5091465	{90}	12,500000	{25,152}	12,371410	{25,152}	11,4209154	{25,152}	10,542150
{62,110}	16,0585122	{25,152}	13,399008	{62,110}	13,792328	{90}	12,5000000	{62,110}	11,842368
{90}	18,7500001	{62,110}	14,883091	{90}	18,750000	{62,110}	12,7805655	{90}	18,750000
{22,104}	24,3262893	{22,104}	23,264333	{37,164}	22,079833	{37,164}	20,8506322	{37,164}	19,751423
{37,164}	24,6224322	{37,164}	23,265145	{22,104}	22,145266	{22,104}	21,0648026	{22,104}	20,071894
{60}	25,0000000	{60}	25,000000	{60}	25,000000	{60}	25,0000000	{60}	25,000000
{105,150}	73,2142865	{105,150}	86,607143	{105,150}	46,428571	{105,150}	73,2142858	{105,150}	86,607142
{30,106}	98,5261501	{30,106}	98,750445	{30,106}	98,940612	{30,106}	99,1018444	{30,106}	99,238533
{45,154}	99,9816998	{45,154}	99,981694	{45,154}	99,990847	{45,154}	99,9908461	{45,154}	99,995423
{15,51,170,204}	100,00	{15,51,170,204}	100,00	{15,51,170,204}	100,00	{15,51,170,204}	100,00	{15,51,170,204}	100,00

30		31		32	
PRC	$\delta$	PRC	$\delta$	PRC	$\delta$
{0}	$4,656612875 \cdot 10^{-8}$	{0}	$2,32830643 \cdot 10^{-8}$	{0}	$1,1641532 \cdot 10^{-8}$
{2,8}	0,00007285	{2,8}	0,00004391	{2,8}	0,00002647
{46}	0,00145828	{46}	0,00098450	{46}	0,00066460
{24}	0,00145879	{24}	0,00098476	{24}	0,00066478
{12,34}	0,00145933	{12,34}	0,00098503	{12,34}	0,00066488
{10}	0,00146448	{10}	0,00098760	{10}	0,00066680
{4,32}	0,03851300	{4,32}	0,02926126	{4,32}	0,02223200
{1,128}	0,05553923	{1,128}	0,04275011	{1,128}	0,03290639
{11,138}	0,13751972	{11,138}	0,10930886	{11,138}	0,08688520
{36}	0,43325490	{36}	0,36733434	{36}	0,31125244
{126}	0,43325507	{126}	0,36733451	{126}	0,31125253
{18,72}	0,54067262	{18,72}	0,45582497	{18,72}	0,38406681
{5,160}	0,59438136	{5,160}	0,49745342	{5,160}	0,41633174
{3,19,136,200}	0,59445519	{3,19,136,200}	0,49749034	{3,19,136,200}	0,41634194
{13,162}	0,64531605	{13,162}	0,54161086	{13,162}	0,45457231
{9,130}	0,66587304	{9,130}	0,55947678	{9,130}	0,47008252
{6,40}	0,82293448	{6,40}	0,69659665	{6,40}	0,58965300
{23,232}	0,96449424	{77,178}	0,82098101	{33,132}	0,69886183
{33,132}	0,96456660	{33,132}	0,82103511	{77,178}	0,69886197
{77,178}	0,96462637	{23,232}	0,82108291	{23,232}	0,69891292
{43,142}	1,43664191	{43,142}	1,24000576	{43,142}	1,07028639
{29,184}	1,43664383	{29,184}	1,24000672	{29,184}	1,07028669
{27,172}	1,71020265	{27,172}	1,48514980	{27,172}	1,28971260
{28,50,56,76}	2,23074902	{28,50,56,76}	1,95523772	{28,50,56,76}	1,71375486
{38,44}	2,92792165	{38,44}	2,59075590	{38,44}	2,29241631
{14,42}	2,92792270	{14,42}	2,59075642	{14,42}	2,29241659
{35,140}	4,31182824	{35,140}	3,86706432	{35,140}	3,46817770
{54,108}	4,75528378	{54,108}	4,27932114	{54,108}	3,85100038
{58,78}	5,28554320	{58,78}	4,77403286	{58,78}	4,31202380
{7,168}	5,49921209	{7,168}	4,97387145	{7,168}	4,49871669
{94,122}	7,65776865	{94,122}	7,02787781	{94,122}	6,44787997
{73,146}	8,23756292	{73,146}	7,55670477	{73,146}	6,93221469
{26,74}	8,24926542	{26,74}	7,57915552	{26,74}	6,95831169
{57,156}	8,50194267	{57,156}	7,80701948	{57,156}	7,16891237
{41,134}	8,96383896	{41,134}	8,25570872	{41,134}	7,60198928
{25,152}	9,73006822	{25,152}	8,97984539	{25,152}	8,28696245
{62,110}	10,9725874	{62,110}	10,1663741	{62,110}	9,41918193
{90}	12,5000000	{37,164}	17,6431303	{90}	12,5000000
{37,164}	18,6470814	{22,104}	18,1226269	{37,164}	16,6550140
{22,104}	19,0789398	{90}	18,7500000	{22,104}	17,2275431
{60}	25,0000000	{60}	25,0000000	{60}	25,0000000
{105,150}	46,4285714	{105,150}	73,2142857	{105,150}	86,6071428
{30,106}	99,3544203	{30,106}	99,4526713	{30,106}	99,5359692
{45,154}	99,9954227	{45,154}	99,9977113	{45,154}	99,9977112
{15,51,170,204}	100,00	{15,51,170,204}	100,00	{15,51,170,204}	100,00



## APÊNDICE D - Limite das funções dos nível de reversibilidade

•PRC {105, 150}:

$x = L_{max}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$qtd1_{105}(x)$	2	6	6	22	54	54	182	438	438	1462	3510	3510	11702	28086	28086
$qtd4_{105}(x)$	0	0	2	2	2	18	18	18	146	146	146	1170	1170	1170	9362

Tabela 17: Frequência de ocorrência das quantidades de pré-imagens da regra 105.

$$\begin{aligned}
 qtd1_{105}(x) &= \frac{2}{21} \left[ -9 - 2^x \cdot \left( -14 + \overbrace{5 \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot x}{3}\right) + \sqrt{3} \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot x}{3}\right)}^T \right) \right] \\
 &= \frac{2}{21} [-9 - 2^x \cdot (-14 + T)]
 \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
 qtd4_{105}(x) &= \frac{1}{42} \left[ -12 + 2^x \cdot \left( \underbrace{7 + 5 \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot x}{3}\right) + \sqrt{3} \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot x}{3}\right)}_T \right) \right] \\
 &= \frac{1}{42} [-12 + 2^x \cdot (7 + T)]
 \end{aligned} \tag{17}$$

$$\delta'_{105}(x) = \frac{qtd1_{105}(x) + (1/4) \cdot qtd4_{105}(x)}{-2 + 2^{x+1}} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow +\infty} \delta'_{105}(x) &= \frac{qtd1_{105}(x) + (1/4).qtd4_{105}(x)}{-2 + 2^{x+1}} \\
&= \frac{\frac{2}{21} [-9 - 2^x \cdot (-14 + T)] + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{42} [-12 + 2^x \cdot (7 + T)]}{-2 + 2^{x+1}} \\
&= \frac{-\frac{18}{21} - \frac{2 \cdot 2^x}{21} \cdot (-14 + T) - \frac{12}{168} + \frac{2^x}{168} \cdot (7 + T)}{-2 + 2^{x+1}} \\
&= \frac{-144 - 16 \cdot 2^x \cdot (-14 + T) - 12 + 2^x \cdot (7 + T)}{168} \\
&= \frac{[-156 - 16 \cdot 2^x \cdot (-14 + T) + 2^x \cdot (7 + T)] \cdot \frac{1}{168}}{-2 + 2^{x+1}} \\
&= \frac{(-156 + 224 \cdot 2^x - 16 \cdot T \cdot 2^x + 7 \cdot 2^x + 2^x \cdot T) \cdot \frac{1}{168}}{-2 + 2^{x+1}} \\
&= \frac{(-156 + 231 \cdot 2^x - 15 \cdot T \cdot 2^x) \cdot \frac{1}{168}}{-2 + 2 \cdot 2^x} \\
&= \frac{(-156 + 231 \cdot 2^x - 15 \cdot T \cdot 2^x) \cdot \frac{1}{168} \cdot \frac{1}{2^x}}{\frac{-2 + 2 \cdot 2^x}{2^x}} \\
&= \frac{\left( \frac{-156}{2^x} + \frac{231 \cdot 2^x}{2^x} - \frac{15 \cdot T \cdot 2^x}{2^x} \right) \cdot \frac{1}{168}}{\frac{-2}{2^x} + \frac{2 \cdot 2^x}{2^x}} \\
&= \frac{\left( -\frac{156}{2^x} + 231 - 15 \cdot T \right) \cdot \frac{1}{168}}{-\frac{2}{2^x} + 2} \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{156}{2^x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{2}{2^x} = 0 \end{cases} \\
&= \frac{\frac{231 - 15 \cdot T}{168}}{2} = \frac{231 - 15 \cdot T}{168 \cdot 2} = \frac{231 - 15 \cdot T}{336} \\
\lim_{x \rightarrow +\infty} \delta'_{105}(x) &= \frac{231 - 15 \cdot (5 \cdot \cos(\frac{2 \cdot \pi \cdot x}{3}) + \sqrt{3} \cdot \sin(\frac{2 \cdot \pi \cdot x}{3}))}{336}
\end{aligned}$$

$x = L_{max}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\cos(\frac{2 \cdot \pi \cdot x}{3})$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1
$\sin(\frac{2 \cdot \pi \cdot x}{3})$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0

Tabela 18: Valores de seno e cosseno em função de  $\frac{2 \cdot \pi \cdot x}{3}$ .

$x \bmod 3 = 0$ :

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow +\infty} \delta'_{105}(x) &= \frac{231 - 9 \cdot (5 \cdot \cos(\frac{2 \cdot \pi \cdot x}{3}) + \sqrt{3} \cdot \sin(\frac{2 \cdot \pi \cdot x}{3}))}{336} = \frac{231 - 9 \cdot 5}{336} \\
&= \frac{186}{336} = 0,464286 = 46,4286
\end{aligned}$$

$x \bmod 3 \neq 0$  e  $\text{sen}(\frac{2\pi x}{3}) = \sqrt{3}/2$ :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \delta'_{105}(x) &= \frac{231 - 9.(5.\cos(\frac{2\pi x}{3}) + \sqrt{3}.\sin(\frac{2\pi x}{3}))}{336} \\ &= \frac{231 - 9.(5.(-1/2) + \sqrt{3}.\sqrt{3}/2)}{336} \\ &= \frac{231 - 9.(-\frac{5}{2} + \frac{9}{2})}{336} \\ &= \frac{231 - 9.(-\frac{5+9}{2})}{336} = \frac{231 - 9. -7}{336} = \frac{231 + 63}{336} = \frac{294}{336} \\ &= 0,732142 = 73,2142 \end{aligned}$$

$x \bmod 3 \neq 0$  e  $\text{sen}(\frac{2\pi x}{3}) = -\sqrt{3}/2$ :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \delta'_{105}(x) &= \frac{231 - 9.(5.\cos(\frac{2\pi x}{3}) + \sqrt{3}.\sin(\frac{2\pi x}{3}))}{336} \\ &= \frac{231 - 9.(5.(-1/2) + \sqrt{3}.(-\sqrt{3}/2))}{336} \\ &= \frac{231 - 9.(-\frac{5}{2} - \frac{9}{2})}{336} = \frac{231 - 9.(-\frac{5-9}{2})}{336} \\ &= \frac{231 + 9.4}{336} = \frac{231 + 36}{336} = \frac{267}{336} \\ &= 0,866071 = 86,6071 \end{aligned}$$

•PRC {90}:

$x = L_{max}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$qtd_{290}(x)$	1	1	5	5	21	21	85	85	341	341	1365	1365	5461	5461	21845
$qtd_{490}(x)$	0	1	1	5	5	21	21	85	85	341	341	1365	1365	5461	5461

Tabela 19: Frequência de ocorrência das quantidades de pré-imagens da regra 90.

$$qtd_{290}(x) = \frac{1}{6}.(-2 + 3.2^x + (-1)^{1+x}.2^x) \quad (19)$$

$$qtd_{490}(x) = \frac{1}{12}.(-4 + (-2)^x + 3.2^x) \quad (20)$$

$$\delta'_{90}(x) = \frac{\frac{1}{2}.qtd_{290}(x) + \frac{1}{4}.qtd_{490}(x)}{-2 + 2^{x+1}} \quad (21)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \delta'_{90}(x) = \frac{\frac{1}{2}.qtd_{290}(x)}{-2 + 2^{x+1}} + \frac{\frac{1}{4}.qtd_{490}(x)}{-2 + 2^{x+1}} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a}{c} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{b}{c}$$

–Limite de  $\frac{a}{c}$ :

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a}{c} &= \frac{\frac{1}{2} \cdot qtd2_{90}(x)}{-2 + 2^{x+1}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \cdot (-2 + 3 \cdot 2^x + (-1)^{1+x} \cdot 2^x)}{-2 + 2^{x+1}} \\
 &= \frac{\frac{1}{12} \cdot (-2 + 3 \cdot 2^x + (-1)^{1+x} \cdot 2^x)}{-2 + 2^{x+1}} \\
 &= \frac{\frac{1}{12} \cdot (-2 + 3 \cdot 2^x + (-1)^{1+x} \cdot 2^x)}{\frac{-2 + 2^{x+1}}{2^x}} = \frac{\frac{1}{12} \cdot \frac{1}{2^x} \cdot (-2 + 3 \cdot 2^x + (-1)^{1+x} \cdot 2^x)}{\frac{-2}{2^x} + \frac{2 \cdot 2^x}{2^x}} \\
 &= \frac{\frac{1}{12} \cdot \left( \frac{-2}{2^x} + \frac{3 \cdot 2^x}{2^x} + \frac{(-1)^{1+x} \cdot 2^x}{2^x} \right)}{\frac{-2}{2^x} + \frac{2 \cdot 2^x}{2^x}} \\
 &= \frac{\frac{1}{12} \cdot \left( \frac{-2}{2^x} + \frac{3 \cdot 2^x}{2^x} + \frac{(-1)^{1+x} \cdot 2^x}{2^x} \right)}{\frac{-2}{2^x} + \frac{2 \cdot 2^x}{2^x}} \left\{ \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{2}{2^x} = 0 \right. \\
 &= \frac{\frac{1}{12} \cdot (0 + 3 + (-1)^{1+x})}{0 + 2} = \frac{\frac{1}{12} \cdot (3 + (-1)^{1+x})}{2} \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{12} \cdot (3 + (-1)^{1+x}) = \frac{1}{24} \cdot (3 + (-1)^{1+x})
 \end{aligned}$$

–Limite de  $\frac{b}{c}$ :

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{b}{c} &= \frac{\frac{1}{4} \cdot qtd4_{90}(x)}{2(-1 + 2^x)} = \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{12} \cdot (-4 + (-2)^x + 3 \cdot 2^x)}{-2 + 2 \cdot 2^x} = \frac{\frac{1}{48} \cdot (-4 + (-2)^x + 3 \cdot 2^x)}{-2 + 2 \cdot 2^x} \\
 &= \frac{\frac{1}{48} \cdot (-4 + (-2)^x + 3 \cdot 2^x)}{\frac{-2 + 2 \cdot 2^x}{2^x}} = \frac{\frac{1}{2^x} \cdot \frac{1}{48} \cdot (-4 + (-2)^x + 3 \cdot 2^x)}{-\frac{2}{2^x} + \frac{2 \cdot 2^x}{2^x}} \\
 &= \frac{\frac{1}{48} \cdot \left( -\frac{4}{2^x} + \frac{(-2)^x}{2^x} + \frac{3 \cdot 2^x}{2^x} \right)}{-\frac{2}{2^x} + \frac{2 \cdot 2^x}{2^x}} \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{4}{2^x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{2}{2^x} = 0 \end{array} \right. \\
 &= \frac{\frac{1}{48} \cdot (0 + (-\frac{2}{2})^x + 3)}{0 + 2} = \frac{\frac{1}{48} \cdot (3 + (-1)^x)}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{48} \cdot (3 + (-1)^x) \\
 &= \frac{1}{96} \cdot (3 + (-1)^x)
 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{a}{c} + \frac{b}{c} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{1}{24} \cdot (3 + (-1)^{1+x}) + \frac{1}{96} \cdot (3 + (-1)^x) \right]$$

Para  $x \bmod 2 = 0$ ,  $(-1)^{1+x} = -1$  e  $(-1)^x = 1$ ; então:

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{1}{24} \cdot (3 + (-1)^{1+x}) + \frac{1}{96} \cdot (3 + (-1)^x) \right] &= \frac{1}{24} \cdot (3 - 1) + \frac{1}{96} \cdot (3 + 1) \\
 &= \frac{2}{24} + \frac{4}{96} = \frac{1}{8} = 0,125 = 12,5
 \end{aligned}$$

Para  $x \bmod 2 \neq 0$ ,  $(-1)^{1+x} = 1$  e  $(-1)^x = -1$ ; então:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{1}{24} \cdot (3 + (-1)^{1+x}) + \frac{1}{96} \cdot (3 + (-1)^x) \right] &= \frac{1}{24} \cdot (3 + 1) + \frac{1}{96} \cdot (3 - 1) \\ &= \frac{4}{24} + \frac{2}{96} = 0,1875 = 18.75\end{aligned}$$

•PRC {60}:

$x = L_{max}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$qtd2_{60}(x)$	1	3	7	15	31	63	127	255	511	1023	2047	4095	8191	16383	32767

Tabela 20: Frequência de ocorrência das quantidades de pré-imagens da regra 60.

$$qtd2_{60}(x) = -1 + 2^x \quad (22)$$

$$\delta'_{60}(x) = \frac{(1/2) \cdot qtd2_{60}(x)}{-2 + 2^{x+1}} \quad (23)$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \delta'_{60}(x) &= \frac{(1/2) \cdot qtd2_{60}(x)}{-2 + 2^{x+1}} = \frac{(1/2) \cdot (-1 + 2^x)}{-2 + 2^{x+1}} = \frac{(1/2) \cdot (-1 + 2^x)}{\frac{-2 + 2^{x+1}}{2^x}} \\ &= \frac{\frac{-\frac{1}{2} + 2^x}{2^x}}{\frac{-2 + 2^{x+1}}{2^x}} = \frac{(-\frac{1}{2} + \frac{2^x}{2}) \cdot \frac{1}{2^x}}{\frac{-2 + 2 \cdot 2^x}{2^x}} = \frac{-\frac{1}{2 \cdot 2^x} + \frac{2^x}{2 \cdot 2^x}}{-\frac{2}{2^x} + \frac{2 \cdot 2^x}{2^x}} \\ &= \frac{-\frac{1}{2 \cdot 2^x} + \frac{1}{2}}{-\frac{2}{2^x} + 2} \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2 \cdot 2^x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{2}{2^x} = 0 \end{cases} \\ &= \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4} = 0,25 = 25\end{aligned}$$

•PRC {30, 106}:

$x = L_{max}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$qtd1_{30}(x)$	0	2	5	11	31	72	156	346	745	1567	3283	6820	14048	28806	58829
$qtd2_{30}(x)$	1	2	3	8	14	24	46	79	134	235	401	679	1161	1974	3345
$qtd3_{30}(x)$	0	0	1	1	1	2	2	2	3	3	3	4	4	4	5

Tabela 21: Frequência de ocorrência das quantidades de pré-imagens da regra 30.

$$\begin{aligned}
qtd1_{30}(x) &= -4.qtd1_{30}(x-6) - 2.qtd1_{30}(x-5) - 4.qtd1_{30}(x-4) \\
&\quad + 3.qtd1_{30}(x-3) + 2.qtd1_{30}(x-1)
\end{aligned}$$

$$qtd1_{30}(1) = 0 \quad qtd1_{30}(4) = 11 \quad (24)$$

$$qtd1_{30}(2) = 2 \quad qtd1_{30}(5) = 31$$

$$qtd1_{30}(3) = 5 \quad qtd1_{30}(6) = 72$$

$$\begin{aligned}
qtd2_{30}(x) &= +3 - 2.qtd2_{30}(x-6) - qtd2_{30}(x-4) + 3.qtd2_{30}(x-3) \\
&\quad + qtd2_{30}(x-1)
\end{aligned}$$

$$qtd2_{30}(1) = 1 \quad qtd2_{30}(4) = 8 \quad (25)$$

$$qtd2_{30}(2) = 2 \quad qtd2_{30}(5) = 14$$

$$qtd2_{30}(3) = 3 \quad qtd2_{30}(6) = 24$$

$$qtd3_{30}(x) = \frac{1}{9} \left( 3.x + \sqrt{3} \cdot \sin \left( \frac{2.\pi.x}{3} \right) + 3 \cdot \cos \left( \frac{2.\pi.x}{3} \right) - 3 \right) \quad (26)$$

$$\delta'_{30}(x) = \frac{qtd1_{30}(x) + \frac{1}{2}.qtd2_{30}(x) + \frac{1}{3}.qtd3_{30}(x)}{-2 + 2^{x+1}} \quad (27)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \delta'_{30}(x) = 1$$