UNIVERSIDADE PRESBITERIANA MACKENZIE
FACULDADE DE COMPUTAÇÃO DE INFORMÁTICA
CURSO DE MATEMÁTICA

ANNA CAROLINA PICARELLI BRANDÃO

A RAZÃO ÁUREA DIANTE DE NOSSOS OLHOS

São Paulo
2019

ANNA CAROLINA PICARELLI BRANDÃO

A RAZÃO ÁUREA DIANTE DE NOSSOS OLHOS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Faculdade de Computação e Informática da Universidade Presbiteriana Mackenzie, como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

ORIENTADORA: Profª. Drª. Eriko Matsui Yamamoto

São Paulo

2019

ANNA CAROLINA PICARELLI BRANDÃO

A RAZÃO ÁUREA DIANTE DE NOSSOS OLHOS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Faculdade de Computação e Informática da Universidade Presbiteriana Mackenzie, como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Aprovada em

BANCA EXAMINADORA

Profª. Drª. Eriko Matsui Yamamoto – Orientadora
Universidade Presbiteriana Mackenzie

Profª. Drª. Vera Lucia Antonio Azevedo
Universidade Presbiteriana Mackenzie

Prof. Dr. Wagner de Souza Borges
Universidade Presbiteriana Mackenzie

Dedico este trabalho a minha mãe e irmãs, amigos e colegas pelo incentivo e pelo apoio constante.

A todos que contribuíram de alguma forma em minha formação acadêmica.

AGRADECIMENTOS

Agradeço em primeiro lugar a Oxalá por contribuir no decorrer desta jornada e a todos que me acompanharam nessa trajetória.

A orientadora Profª. Drª. Eriko Matsui Yamamoto a qual teve papel fundamental na elaboração deste trabalho. Além de seu companheirismo e disponibilidade para me auxiliar em diversos momentos.

Aos meus familiares que sempre apoiaram em meus estudos e escolhas tomadas e que tiveram muita compreensão e paciência durante toda a minha jornada acadêmica.

Aos meus professores e colegas que contribuíram para a conclusão deste trabalho de alguma forma.

Não há ramo da matemática, por mais abstrato que seja,

que não possa um dia vir a ser aplicado aos fenômenos da vida real.

(Lobachevsky*)*

RESUMO

Este estudo aborda a razão áurea, relacionando-a com a nossa realidade, tendo como objetivo que alunos do ensino médio façam uma relação mais aderente ao entendimento da Matemática no cotidiano, incentivando e motivando o estudo do discente por essa disciplina. Nessa análise, será apresentado, de maneira simples, o surgimento da razão áurea e toda a sua história, passando assim por sua utilização na Grécia e no Egito, seu desenvolvimento durante o Renascimento e até sua utilização na Odontologia. Outro ponto abordado é a relação evidente com a sequência de Fibonacci, retângulo áureo e espiral logarítmica. Com isso, será demonstrado o quanto a Matemática está presente em nosso dia a dia e como sua prática pode ser mais instigante.

Palavras-chave: Matemática. Razão áurea. Número de ouro. Fibonacci. Sequência de Fibonacci.

ABSTRACT

This study approaches the golden ratio, relating it to our reality, aiming at high school students to make a more adherent relationship to understanding of Mathematics daily, encouraging and motivating students to study this subject. In this analysis, it will be presented, in a simple way, the appearance of the golden ratio and all of its history, passing through Greece and Egypt, its development during the Renaissance and even its use in Dentistry. Another point approached is the evident relation with Fibonacci sequence, golden rectangle and logarithmic spiral. With this, we will demonstrate how much Mathematics is present in our daily life and how its practice can be more thought-provoking.

Keywords: Mathematics. Golden ratio. Golden number. Fibonacci. Fibonacci sequence.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A razão áurea ou número de ouro, olhando de forma simples é apenas uma sequência numérica com um valor aproximado de 1,618. Porém, o que a torna especial é a ligação que se faz com os fenômenos da natureza.

Segundo Lívio (2006), mesmo sendo menos conhecido que o número π (pi), ele se torna mais fascinante que π, por suas inúmeras funções na natureza.

Uma gama de estudiosos desde biólogos, filósofos, artistas, pensadores e entre diversas áreas, apresentaram uma atenção sobre este assunto, desde a aplicação prática dessa até em suas fórmulas, curiosidades e propriedades.

A sua origem histórica veio da escola grega de Pitágoras, através de referências buscadas na natureza, a beleza do corpo em si; representada séculos depois pelo Homem Vitruviano, de Leonardo da Vinci. Todas estas inspirações buscavam relações numéricas, tendo como mais importante a razão áurea, que busca o enquadramento com elementos mensuráveis ao olho nu.

Os pitagóricos consideravam o número de ouro não apenas como uma simples expressão quantitativa, mas a base para todo o imaginável, sendo sintetizada não de apenas uma reflexão esotérica, mas sim a real observação da natureza.

Para a sociedade grega, o número tinha propriedades mágicas, sendo usado em construções como o Vale dos Templos e o Parthenon, ambas caracterizadas por suas vigas. O número foi passado por gerações sendo notado nos mais diversos marcos da humanidade como a Mona Lisa de Da Vinci ou até fenômenos da biologia como o problema dos coelhos de Fibonacci.

Caraça (1959 apud Sousa, 2004) alega que a ciência da matemática está totalmente relacionada à procura de solução de problemas e isso faz com que a humanidade tenha conhecimento de natureza física e social.

Observamos que os conceitos matemáticos surgem a todo instante e a humanidade usa o novo e o velho para que possa entender de uma melhor forma o mundo em que vivemos (SOUSA, 2004).

A frase "*matemática é para poucos*" refere-se à Antiguidade e dela resulta outra expressão "*matemática é difícil*" (SILVEIRA, 2011) e assim, podemos atribuí-las no ambiente diário das escolas em que a maioria das reclamações e notas mais baixas são em exatas, ou seja, matemática.

No ambiente escolar o ideal é trabalhar com circunstâncias que proporcionem no aprendizado a análise, observação, questionamentos, formulações e teorias que venham assim, agregar descobertas e conhecimentos novos que se agregarão com os conhecimentos que previamente foram adquiridos. Segundo Huete e Bravo (2006), adquirir uma compreensão matemática é agregá-la à estrutura cognitiva existente.

Levando em conta isso, o foco da presente pesquisa é a aplicação do número de ouro para alunos visando à fácil compreensão e absorção; tendo em vista o dinamismo da aprendizagem. A proposta é mostrar como podemos usar a razão áurea e sua representação matemática na perfeição da natureza no âmbito estudantil.

1.1 OBJETIVO

O objetivo deste trabalho é fazer com que alunos do ensino médio adquiram conhecimento sobre a razão áurea que está presente em diversos elementos da natureza, para despertar interesse pela matemática e melhorar a aprendizagem dos estudantes.

1.2 METODOLOGIA

Este trabalho é baseado em investigações do tema, por meio de uma pesquisa exploratória que tem como objetivo propiciar maior ligação do problema visualizando que ele se torne mais visível ou a construir hipóteses (GERHARDT; SILVEIRA, 2009). A maioria das pesquisas exploratórias inclui levantamento bibliográfico; entrevistas com pessoas que apresentam situações práticas que envolva o problema pesquisado; e/ou estudo de referências que incentivem o entendimento (GIL, 2007).

Estudos exploratórios são mais tipicamente feitos para três propósitos: (1) simplesmente satisfazer a curiosidade e desejo do pesquisador de melhor compreensão, (2) testar a viabilidade de realizar um estudo mais cuidadoso, e (3) desenvolver os métodos a serem empregado em um estudo mais cuidadoso (BABBIE, 1986).

Segundo Lima e Mioto (2007) a pesquisa bibliográfica tem sido muito utilizada para estudos exploratórios. Assim, será utilizada a pesquisa bibliográfica como base para realizar este trabalho.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Segundo Ramos (2013), a razão áurea é reverenciada a partir da época de Euclides de Alexandria (323-285 a. C.), e possui uma propriedade que aparece em muitas coisas da natureza.

> Menos conhecido que o Pi é um outro número, o Fi (ϕ), que, em muitos aspectos, é ainda mais fascinante. Suponha que eu lhe pergunte: o que o encantador arranjo de pétalas numa rosa vermelha, o famoso quadro “O Sacramento da Última Ceia”, de Salvador Dalí, as magníficas conchas espirais de moluscos e a procriação de coelhos têm em comum? É difícil de acreditar, mas esses exemplos bem díspares têm em comum um certo número, ou proporção geométrica, conhecido desde a Antiguidade, um número que no século XIX recebeu o título honorífico de “Número Áureo”, “Razão Áurea” e “Secção Áurea”. Um livro publicado na Itália no começo do século XVI chegou a chamar essa razão de Proporção Divina (LÍVIO, 2011, p. 13).

A razão áurea pode ser chamada também de número de ouro, proporção áurea ou segmento áureo e apresenta a mais agradável proporção entre duas medidas (QUEIROZ, 2007). É retratada pela letra ϕ, equivalente ao valor $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, um número irracional que se aproxima de 1,618 que foi obtido matematicamente por meio de sequências contínuas infinitas, hipóteses geométricas ou algébricas (BELINI, 2015).

A denominação “divisão de um segmento em média e extrema razão” ou simplesmente “secção”, era como os gregos antigos a nomeava. Para representá-la foi usada a letra ϕ (Phi ou Fi, maiúsculo), pelo matemático norte-americano Mark Barr, no começo do século XX prestando homenagem ao escultor e arquiteto Phídias, que foi o arquiteto do templo grego Parthenon (QUEIROZ, 2007). As denominações originais apareceram por volta do século XIX em trabalhos alemães. Já o termo proporção divina se deve a Luca Pacioli (1445 – 1517).

Segundo Belini (2015) acredita-se que já em 2500 anos a.C. a razão áurea foi usada nas construções das pirâmides egípcias e o pentagrama, foi selecionado por representar a proporção divina, símbolo dos pitagóricos 500 anos a.C.

> De qualquer forma ele foi descoberto, sua presença é marcante não só nos vegetais, mas nos seres vivos em geral, inclusive no homem, nos cristais, na natureza e no próprio cosmos. Depois de sua descoberta, de forma brilhante, o homem, através da Álgebra, o equacionou e chegou numa proporção, à qual deu o nome de Proporção Áurea, e foi através, principalmente, da Geometria que pode vislumbrar as formas perfeitas que a ele estão relacionadas. Foi através dele que buscou o entendimento não só da estrutura da natureza e do universo, mas, principalmente, do próprio homem (CONTADOR, 2011, p. 18-19).

A razão áurea teve o seu surgimento geometricamente, desde a divisão de um segmento em razão extrema e média, definido pela primeira vez há 300 anos a.C. por Euclides (RAMOS, 2013).

3 RAZÃO ÁUREA

> "É impossível explicar honestamente as belezas contidas nas leis da natureza, de uma forma que as pessoas possam senti-las, sem que elas tenham uma boa compreensão da Matemática". (RICHARD FEYNMAN)

3.1 PROPORÇÃO ÁUREA

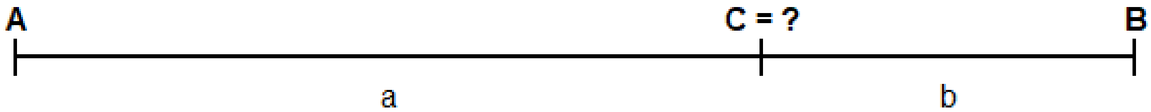
O que podemos ver de padrão entre os girassóis, conchas marinhas, rabo de camaleões, triângulo de Pascal, triângulo chinês, música, pinturas renascentistas e até obras arquitetônicas?

Essa é uma questão já levantada há muitos anos pelos gregos. De acordo com Euclides (apud JUNIOR, 2011, p. 5), "[...] dividir um segmento de reta em média e extrema razão [...]", temos um segmento de reta que dividindo o mesmo em duas partes, de diferentes tamanhos, podemos dizer que, a proporção entre o menor fragmento e o maior encontramos a mesma proporção entre o maior fragmento e o segmento original.

Relativamente a esta partição, o matemático alemão Zeizing formulou, em 1855, o seguinte princípio: *"Para que um todo dividido em duas partes desiguais pareça belo do ponto de vista da forma, deve apresentar a parte menor e a maior a mesma relação que entre esta e o todo"* (JUNIOR, 2011, p. 5).

Na Figura 1, demonstraremos:

Figura 1 - Segmento em média e extrema razão



Fonte: própria

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB}$$

Sabendo que a maior parte é a e a menor parte é b, portanto, o segmento todo será $a + b$. Concluímos que:

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}} = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{CB}} \Rightarrow \frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} \Rightarrow \quad 1 + \frac{b}{a} = \frac{a}{b}$$

Fazendo $\frac{a}{b} = x$,então:

$$1 + \frac{b}{a} = \frac{a}{b} \rightarrow 1 + \frac{1}{x} = x$$

ou

$$\frac{x+1}{x} = \frac{x}{1} \Leftrightarrow x^2 = x + 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

Resolvendo a equação de segundo grau, encontramos:

$$\triangle = b^2 - 4.a.c \quad \Rightarrow \triangle = (-1)^2 - 4.1.(-1) \Rightarrow \triangle = 5$$

Então:

$$x_1 = \frac{-(-1) + \sqrt{5}}{2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \simeq \boxed{1{,}618 \ldots = \phi}$$

$$x_2 = \frac{-(-1) - \sqrt{5}}{2} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \simeq \boxed{-0{,}618 \ldots = \phi'}$$

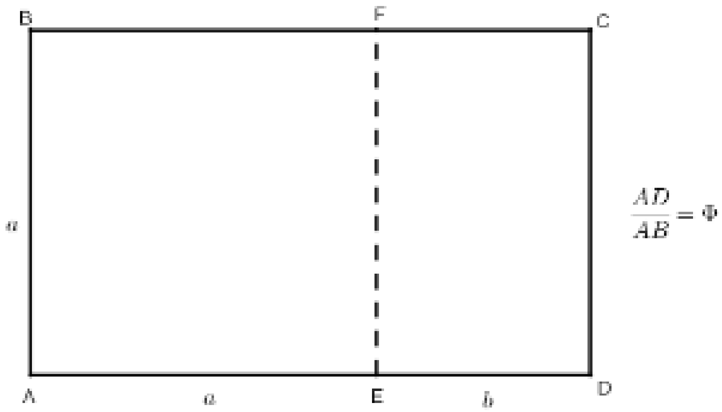
Como estamos calculando uma proporção, não podemos admitir um número negativo como resposta. Portanto, descartando a raiz negativa, encontramos o número irracional 1,618... e indicado pelo símbolo ϕ, fi.

3.2 RETÂNGULO ÁUREO

No ano de 1876, Gustav Fechner, um psicólogo alemão, fez uma pesquisa sobre a predileção por formatos de retângulos. O resultado dessa pesquisa apresentou que a maior parte da população preferia certo retângulo no qual se aproxima das medidas da razão áurea. Diversos estudiosos, como Wilmar (1894), Lalo (1908) e Thorndike (1917), repetiram a experiência e obtiveram efeitos semelhantes (QUEIROZ, 2007).

Por definição, o retângulo áureo é chamado por qualquer retângulo no qual as suas medidas estão na razão áurea. Ou seja, se suprirmos um quadrado dele, ABFE, o retângulo restante EFCD é semelhante ao retângulo original (BEZ, 1997).

Figura 2 – Retângulo áureo



Fonte: Landim (2014, p. 24)

Sendo que, se no retângulo áureo da Figura 2, retirarmos o quadrado ABFE, o retângulo restante, CDEF, será semelhante ao retângulo original.

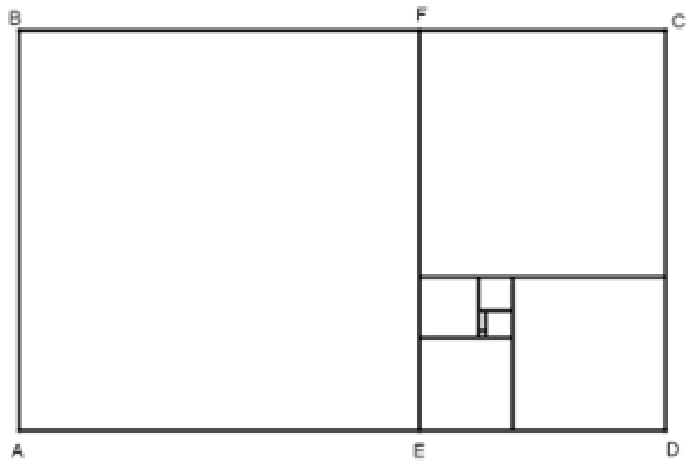
De fato, seja AB = AE = a e DE = b. Pela definição mostrada anteriormente, obtemos:

$$\phi = \frac{AD}{AB} = \frac{a+b}{a} = 1 + \frac{b}{a} \;\; \Rightarrow \;\; \frac{b}{a} = \phi - 1 \;\; \Rightarrow \;\; \frac{a}{b} = \frac{1}{\phi - 1} = \frac{1}{-\phi'} = \phi = \frac{CD}{DE}$$

Isto quer dizer que se o retângulo de lados a + b e a é áureo, também será áureo o retângulo de lados a e b.

Segundo Ramos (2013), seguindo este raciocínio, ou seja, retiramos agora um quadrado do retângulo áureo CDEF, temos outro retângulo interior a este, o qual também obedece às proporções áureas, e, assim, de maneira infinita, construiremos infinitos retângulos, todos eles guardando as proporções áureas, conforme a Figura 3. Esta propriedade se chama auto propagação.

Figura 3 – Sequência infinita de retângulos áureos



Fonte: Landim (2014, p. 25)

Nesse caso, dados os números a e b em Proporção Áurea, formamos a sequência: $a_1 = a + b, a_2 = a, a_3 = b, a_4 = a - b, \dots, a_n = a_{n-2} - a_{n-1}, \dots$, cujos termos são, dois a dois, lados de um retângulo áureo. A sequência fica então:

$$a + b, a, b, a - b, 2b - a, 2a - 3b, 5b - 3a, 5a - 8b, 13b - 8a, \dots,$$

nos quais tais termos são decrescentes e incontáveis, já que os mesmos são provenientes do processo anterior de retirar quadrados de retângulos áureos, onde a razão entre os lados de cada um desses retângulos é irracional (igual a ϕ).

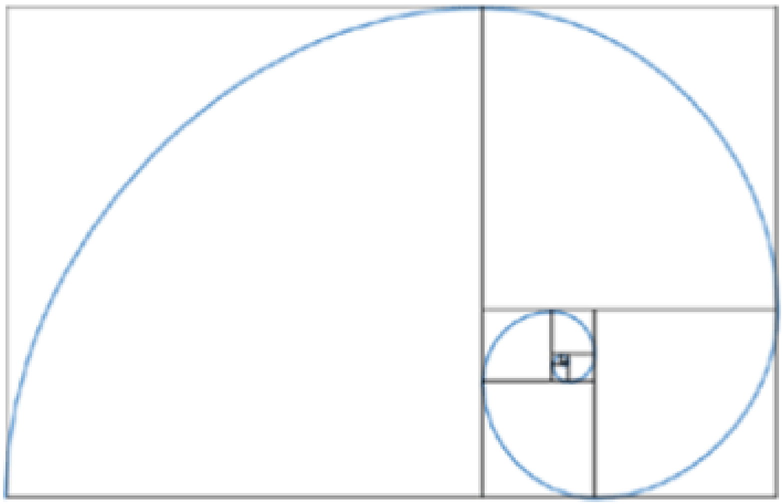
3.3 ESPIRAL LOGARÍTMICA

Um retângulo áureo tem a intrigante particularidade de, se o dividirmos em um quadrado e em um retângulo, o novo retângulo é áureo também. Refazendo este procedimento eternamente e juntando os cantos dos quadrados formados, consegue-se uma espiral a que se dá o nome de espiral áurea (ÁVILA, 1985).

A espiral sempre foi conhecida por uma variedade de nomes, correspondentes a uma ou outra característica. Em 1638, Descartes nomeou-a de espiral equiangular, uma vez que o ângulo em que um raio vetor corta a curva, em qualquer ponto, é constante. É espiral logarítmica é mencionado como o “O Olho de Deus” também (LIVIO, 2006).

> A espiral logarítmica e a razão áurea caminham de mãos dadas. Examine a série de retângulos áureos aninhados obtidos quando removemos quadrados de um retângulo áureo (Figura 4). Se você ligar os pontos sucessivos onde esses “quadrados rodopiantes” dividem os lados em razões áureas, obterá uma espiral logarítmica que se enrola para o interior na direção do pólo (LIVIO, 2006 p. 140).

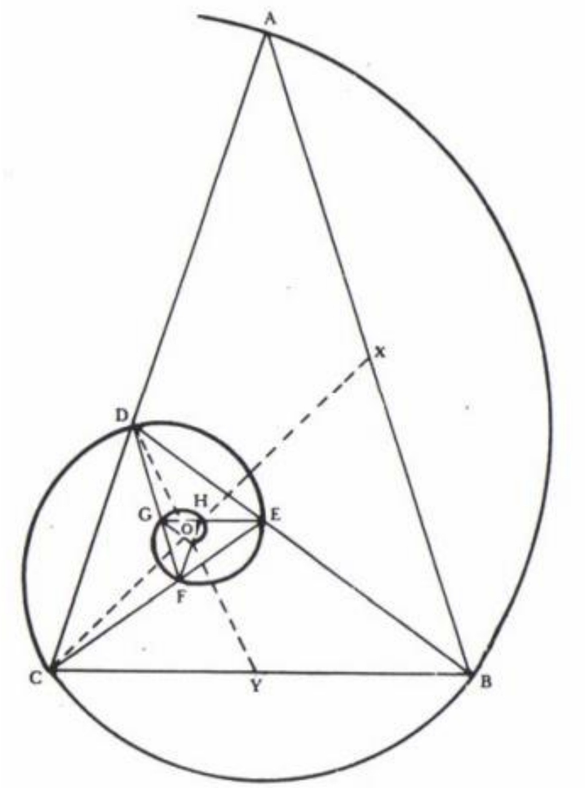
Figura 4 – Espiral de um retângulo áureo



Fonte: Celuque (2004, p. 61)

É possível também, obter a espiral a partir de um triângulo áureo. Para isto, traçaremos uma bissetriz no ângulo $\hat{B}$ da base do triângulo encontrando AC em D, sendo D o ponto que divide AC na razão áurea, e teremos outro triângulo áureo BCD. Repetiremos o processo incessantemente, formando assim, infinitos triângulos áureos, conforme a Figura 5.

Figura 5 – Espiral de um triângulo áureo



Fonte: Bez (1997, p. 28)

4 FIBONACCI

> "Os nove números indianos são: 9 8 7 6 5 4 3 2 1. Com esses nove números, e com o signo 0... qualquer número pode ser escrito, como está demonstrado abaixo. " (Leonardo Fibonacci)

4.1 CONTEXTO HISTÓRICO

Leonardo de Pisa (1170-1240), com as palavras citadas acima, começou o seu primeiro e mais importante livro – Liber Abaci (livro do ábaco ou do cálculo). Publicado em 1202, é considerado o melhor tratado sobre Aritmética e Álgebra escrita por um europeu e garantiu-se como modelo durante dois séculos (LIVIO, 2006).

Nascido na década de 1170, em Pisa - uma comunidade italiana na região de Toscana, Leonardo atualmente é mais conhecido como Fibonacci, que teria a intenção de ser "filho de Bonacci" ou "filho da boa natureza" (Figura 6). Em alguns manuscritos e documentos, Leonardo o cita e também é mencionado por outros como Leonardo Bigollo (ou Leonardo Bigollo Pisani), que "Bigollo" pode ser traduzido como "viajante" ou "homem sem importância" (CÂMARA; RODRIGUES, 2008).

Figura 6 - Fibonacci

Fonte: https://atitudereflexiva.wordpress.com/2016/12/07/a-sequencia-de-fibonacci/
(Acesso em 09 de maio de 2019)

Através de suas viagens, Leonardo teve oportunidades de estudar diferentes sistemas numéricos e métodos de operações aritméticas (LIVIO, 2006). Depois de ter finalizado os números indo-arábicos, que eram muito soberbos a todos os outros métodos, ele dedicou os sete primeiros capítulos de seu primeiro livro a explicações sobre a notação indo-arábica e seus empregos práticos.

Já em seus últimos capítulos, abordou a seção áurea, quando se abstrai do sentido verdadeiro de segmento ou de área da proporção e transforma a sua relação geométrica em sequência numérica, que ficou conhecida como série de Fibonacci (JUNIOR, 2011).

Segundo LIVIO (2006), Fibonacci tem um papel esplêndido na história da razão áurea. De um lado, nas situações que usava racionalmente a razão áurea, foi responsável por um progresso significativo, mas não espetacular. Por outro lado, apenas formulando um problema que, a princípio, nada tinha ligação com a razão áurea, ele de forma drástica expandiu o propósito da razão áurea e suas aplicações.

Entretanto, sua contribuição mais importante para a razão áurea e a que lhe trouxe mais exposição vem de um problema que apresentava ser simples do Liber Abaci.

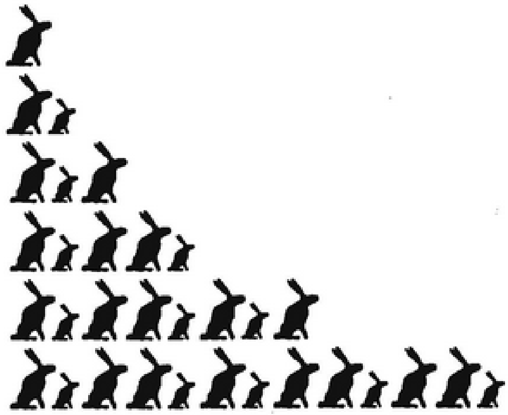
4.2 PROCRIAÇÃO DE COELHOS

A maioria dos estudantes de matemática conheceram o Fibonacci só através do seguinte problema do Capítulo XII do Liber Abaci.

Um homem pôs um par de coelhos num lugar cercado por todos os lados por um muro. Quantos pares de coelhos podem ser gerados a partir desse par em um ano se, supostamente, todo mês cada par dá à luz um novo par, que é fértil a partir do segundo mês?

Comecemos com um par. Após o primeiro mês, o primeiro par dá à luz outro par, de modo que ficamos com dois pares. Na Figura 7, é representado um par maduro com o símbolo de um coelho grande e um par jovem com um símbolo menos.

Figura 7 – Reprodução de coelhos



Fonte: Livio (2006, p. 116)

Após o segundo mês, o par maduro dá à luz outro par jovem, enquanto o par de filhotes amadurece. Portanto, ficam três pares, como desenhado na figura. Após o terceiro mês, cada um dos dois pares maduros dá à luz outro par, e o par de filhotes amadurece, o que nos deixa com cinco pares. Após o quarto mês, cada um dos três pares maduros dá à luz um par, e os dois pares de filhotes crescem, resultando em um total de oito pares. Após cinco meses, temos um par de filhotes de cada um dos cinco pares de adultos, mais três pares amadurecendo num total de treze pares.

A partir daí, conseguimos entender como continuar para obter o número de pares adultos, de pares filhotes e o total de pares nos sucessivos meses. Suponha que examinemos apenas o número de pares adultos em um determinado mês. Este número é formado pelo número de pares adultos do mês anterior, mais o número de pares de filhotes (que amadureceram) do mesmo mês anterior. Porém, o número de pares de filhotes do mês anterior é, na verdade, igual ao número de pares de adultos que existia no mês que antecedeu o mês em questão. Assim, em qualquer mês (começando com o terceiro), o número de pares de adultos é simplesmente igual à soma do número de pares de adultos nos dois meses anteriores. O número de pares de adultos, portanto, segue a sequência: 1, 1, 2, 3, 5, 8, ... Você pode observar na figura que o número de pares de filhotes segue exatamente a mesma sequência, apenas com a diferença de um mês, a saber, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, ..., o número total de pares é simplesmente a soma desses números, que dá a mesma sequência dos pares de adultos, com o primeiro termo omitido (1, 2, 3, 5, 8, ...). A sequência 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, ..., na qual cada termo (começando com o terceiro) é igual à soma dos dois termos anteriores, foi devidamente chamada de sequência de Fibonacci no século XIX pelo matemático Edouard Lucas (LIVIO, 2006).

4.3 RELAÇÃO DA SEQUÊNCIA DE FIBONACCI E A RAZÃO ÁUREA

A relação da razão áurea com a sequência de Fibonacci acontece porque temos uma razão entre um número e seu antecessor que vai se aproximando da razão áurea ou número de ouro.

A sequência de Fibonacci é

1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 + 13 + 21 + 34 + ...;

possuindo incontáveis números, a partir da qual obtemos a seguinte fórmula, para n número natural:

$$F(1) = 1, \qquad F(2) = 1$$

$$F(n+1) = F(n-1) + F(n)$$

Seguindo as razões de cada posição pelo seu antecessor, conseguimos outra sequência numérica que tem a fórmula:

$$U(n) = \frac{F(n+1)}{F(n)}$$

Essa nova sequência vai se aproximando cada vez mais do número de ouro.

5 APLICAÇÕES

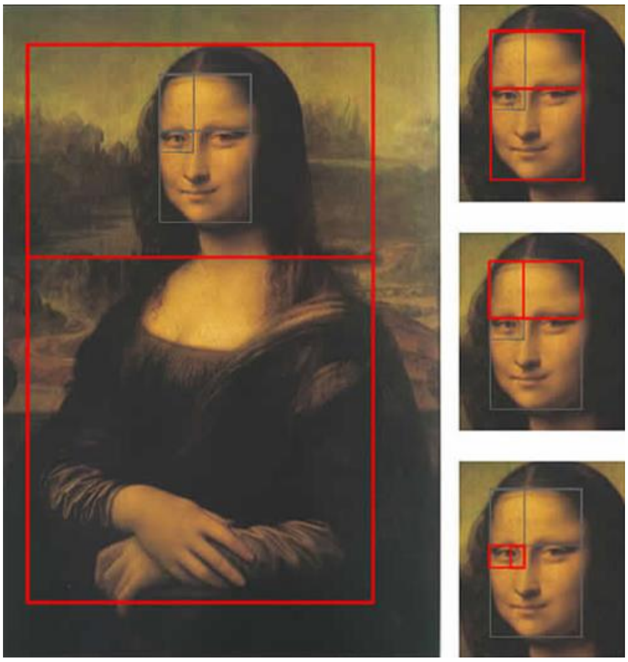
5.1 ARTE

Houve uma grande transformação no sentido da história da razão áurea no Renascimento, e desde então, sua concepção não ficou mais restrita a matemática e sim, passou a ser expandida pelas artes, arquitetura e fenômenos naturais (CÂMARA; RODRIGUES, 2008).

Após a queda de Constantinopla, no século XV, alguns manuscritos de tratados gregos foram carregados por exilados na Itália. Por este motivo, a Antiguidade Clássica provavelmente foi a inspiração para o Renascimento, por conta do destaque nas pinturas e esculturas do corpo humano. Acabou que os artistas prestassem atenção na anatomia e matemática do corpo humano, avaliando a proporção, construção e leis de perspectivas (QUEIROZ, 2007).

Talvez a obra mais notável desta época seja a Mona Lisa, de Leonardo Da Vinci (1452-1519). Da Vinci era muito interessado em matemática e utilizou incontáveis ideias matemáticas em suas obras, tanto na arte quanto na arquitetura e em suas invenções (CÂMARA; RODRIGUES, 2008). A Mona Lisa é ótimo exemplo, observe na Figura 8, que há retângulos áureos em seus olhos, face e testa.

Figura 8 - Mona Lisa e suas proporções



Fonte: Belini (2015, p. 24)

Além de Da Vinci, entre outros pintores e artistas, quem também utilizou a beleza em perfeição foi Alessandro di Mariano Filipepi, chamado de Sandro Botticelli (1445 – 1510) (RAMOS, 2013). Na Figura 9, na obra “O Nascimento de Vênus”, Boticelli utiliza a razão áurea na posição de Afrodite a modo de representação da perfeição da beleza.

Figura 9 - O Nascimento de Vênus

Fonte: Leopoldino (2016, p. 31)

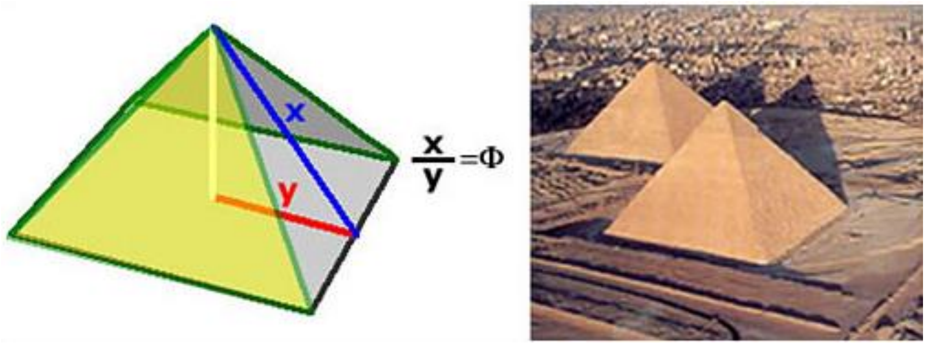
A história da arte revela que, na extensa procura pelo exemplo ininteligível pela perfeição, ao que poderia influenciar instintivamente a virtudes estéticas agradáveis nas obras artísticas e mesmo não sabendo o porquê, a razão áurea afirmou ser a mais duradoura (LEOPOLDINO, 2016).

5.2 ARQUITETURA

As medidas das pirâmides egípcias se assemelham às medidas áureas, como pode ser visto na Figura 10.

> Os egípcios consideravam o número de ouro sagrado tendo uma importância extrema na sua religião e chamavam-no não de número de ouro, mas sim de “número sagrado”. Utilizavam-se para a construção de tempos e sepulcros para os mortos, pois consideravam que, caso isto não acontecesse, o templo poderia não agradar aos deuses, ou a alma do falecido não conseguiria chegar ao além. Para, além disso, os Egípcios consideravam no muito agradável esteticamente, usando o também nos eu sistema de escrita e na decoração dos seus templos (VEIGA, 2006 p. 7).

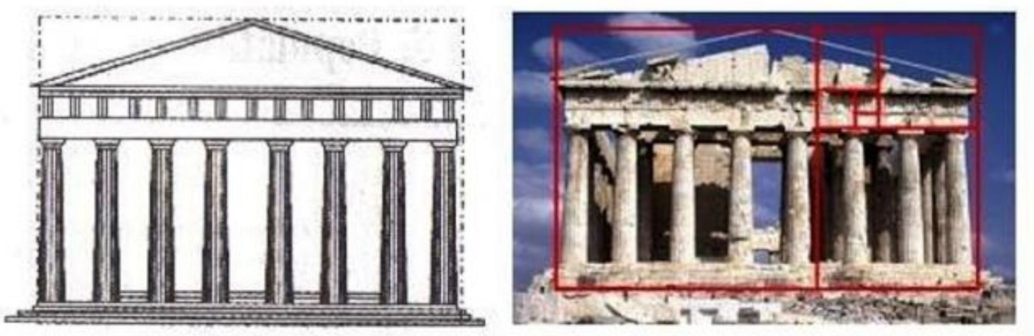
Figura 10 – Pirâmide de Queóps e o número de ouro



Fonte: https://www.bpiropo.com.br/fpc20070226.htm (Acesso em 16 de maio de 2019)

Nas construções gregas, o retângulo áureo foi altamente usado. A geometria era considerada pelos gregos muito harmoniosa e dimensionada e o Parthenon, conhecido também por ser o templo da deusa Atena, senão o mais famoso, é uma dessas construções, que foi realizada pelo arquiteto e escultor Phídias (LAURO, 2005). Isso pode ser observado na Figura 11, com proporções áureas.

Figura 11 – Parthenon e suas proporções



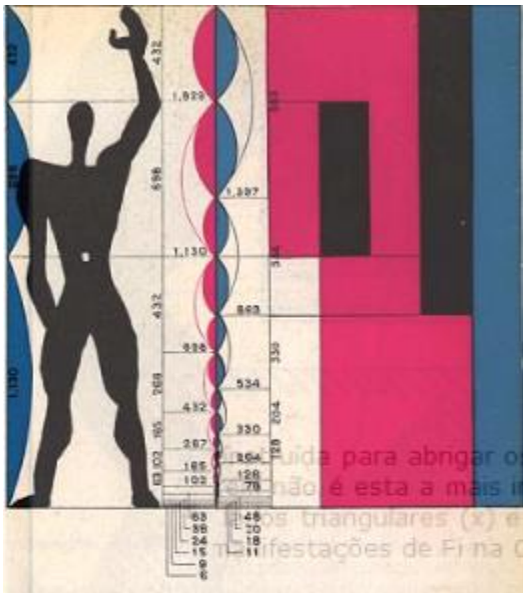
Fonte: https://www.matematicaefacil.com.br/2015/06/razao-aurea-numero-ouro.html (Acesso em 16 de maio de 2019)

No século XXL, Le Corbusier foi um arquiteto que concebeu um símbolo muito significativo no progresso da arquitetura moderna. Dedicou-se com toda a sua competência e seu esforço na criação de um novo e absoluto modo de expressão arquitetônica (CELUQUE, 2004)**.**

> Le Corbusier propôs um sistema de medidas para seus projetos arquitetônicos inteiramente baseado nas proporções humanas. Acreditava ele que seu sistema de medidas iria satisfazer tanto as exigências de beleza, por derivar da Proporção Áurea, quanto as exigências funcionais, pois também estava relacionado às medidas do homem, seu sistema recebeu o nome de Modulor, (módulo de ouro), seguir. Para ele, seria um instrumento universal, pois uma vez que era baseado nas proporções do ser humano, seria de fácil execução e podia ser usado no mundo inteiro levando racionalidade e beleza (CONTADOR, 2011, p. 162).

Na Figura 12, vemos o Modulor, que foi publicado em 1955 e nele há uma referência de modelos de dimensões harmônicas ao corpo humano, que podem ser aplicáveis a Arquitetura e ao Desenho Industrial. Fazia menção à aproximada métrica aplicada na França e Alemanha e o sistema inglês, de polegadas, usadas na Inglaterra e Estados Unidos. Então, o Modulor acabou determinando as larguras e alturas para a execução de várias atividades domésticas e de trabalho, tornando-se amplamente empregado pelos desenhistas industriais e arquitetos pelo mundo todo (QUEIROZ, 2007).

Figura 12 – O modulor



Fonte: Ramos (2013, p.70)

5.3 NATUREZA

Há inúmeras aparições da razão áurea, espiral logarítmica e a sequência de Fibonacci em todo o reino da natureza, sejam nas plantas, nos animais e no ser humano (CÂMARA; RODRIGUES, 2008).

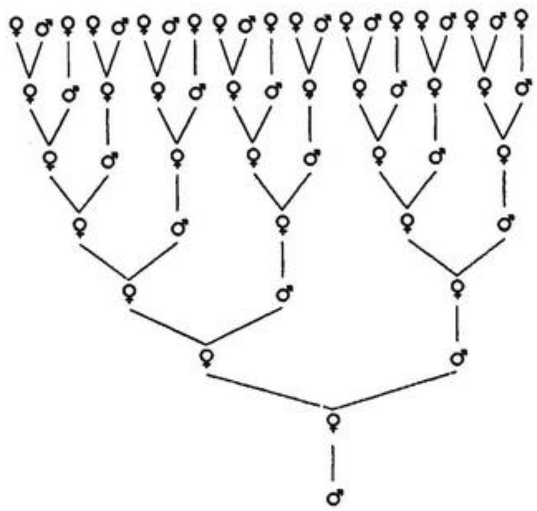
5.3.1 Abelhas

Segundo LIVIO (2006, p. 118-119):

> Os ovos de abelhas operárias que não são fertilizados se tornam zangões. Sendo assim um zangão só tem uma mãe, não tendo pai. Os ovos da rainha, por outro lado, são fertilizados por zangões e se tornam fêmeas (operárias ou rainhas). Uma abelha tem, então, um pai e uma mãe. Consequentemente, um zangão tem uma mãe, dois avós (os pais de sua mãe), três bisavós (os dois pais da avó mais a mão do avô), cinco trisavós (os dois pais da avó mias a mãe do avô), cinco trisavós (dois para cada bisavó e um para o seu bisavô), e assim por diante. Os números da árvore genealógica, 1, 1, 2, 3, 5, ..., formam uma sequência de Fibonacci.

como representada na Figura 13.

Figura 13 – Árvore genealógica do zangão



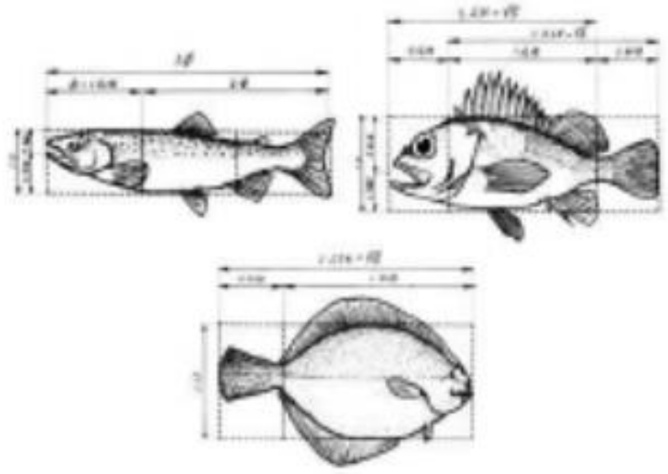
Fonte: Livio (2006, p. 120)

5.3.2 Peixes

Podemos observar a razão áurea também na anatomia de alguns animais (LAURO, 2005).

Na figura 14, vemos peixes que são localizados nas águas da costa canadense do Pacífico. Olhando suas silhuetas e articulações, podemos notar a presença da razão áurea. Nos casos do salmão-prateado e no do mangangá, a boca está no ponto de ouro da altura do corpo.

Figura 14 – Salmão-prateado, mangangá e linguado



Doczi (1990, p. 58)

5.3.3 Conchas

No reino vegetal e animal podemos observar a sequência de Fibonacci em abundância, na maioria das vezes, por meio da espiral de ouro. Como o matemático canadense Coxeter citou, essas proporções encontradas são “apenas uma tendência fascinantemente predominante” (LIVIO, 2006).

A lei da natureza tem como padrão de crescimento esse tipo de espiral. Vemos uma das manifestações mais conhecidas dessa proporção, na concha marinha onde mora o molusco *Nautilus pompilius*, como pode ver na Figura 15.

Figura 15 – Concha do *Nautilus pompilius*

Fonte: https://br.pinterest.com/pin/467389267572746827 (Acesso em 14 de maio de 2019)

5.3.4 Chifres

A espiral logarítmica também está presente em alguns chifres de animais, em redemoinhos como observado na Figura 16.

Figura 16 – Chifres de carneiros

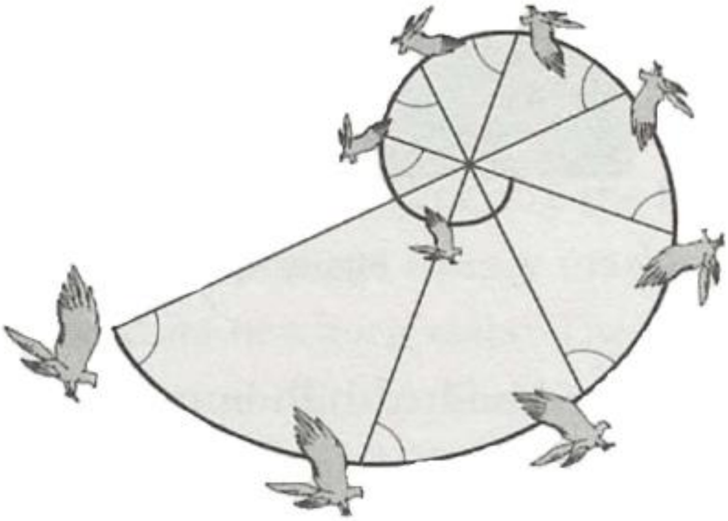
Fonte: Câmara e Rodrigues (2008, p. 127)

5.3.5 Falcões-peregrinos

Como citado no Capítulo 3, seção 3.3 Espiral Logarítmica, espiral equiangular é um dos nomes pelos quais essa espiral é conhecida, e esta reflete uma propriedade única da espiral. De acordo com Livio (2006), se desenharmos uma linha reta do polo até qualquer ponto da curva, ela cortará a curva formando exatamente o mesmo ângulo (Figura 17).

O biólogo Vance A. Tucker da Universidade de Duke, na Carolina do Norte, EUA, publicou uma pesquisa na edição de novembro de 2000 do *Journal of Experimental Biology*, mostrando que os falcões-peregrinos são uma das espécies de aves mais rápidas da Terra podendo sua velocidade chegar a 320 quilômetros por hora quando está atrás de seu alvo. Tucker percebeu que as aves não seguiam uma trajetória retilínea, a qual é mais curta, para atacar suas presas (LIVIO, 2006). Ao pesquisar sobre a ave de rapina, observou que seus olhos ficavam nas laterais de suas cabeças, com uma visão aguçada, elas precisam inclinar a cabeça em 40 graus para o lado a fim de visualizar seu alvo. Tucker então fez experiências em um túnel de vento e descobriu que a inclinação que elas fazem com a cabeça, provoca uma lentidão na sua velocidade. Assim sendo, os falcões-peregrinos fazem uso da propriedade equiangular da espiral antes de atacar suas presas, dessa forma eles maximizam sua velocidade enquanto mantém sua presa à vista.

Figura 17 – Como falcões-peregrinos atacam suas presas



Fonte: Ramos (2013, p. 23)

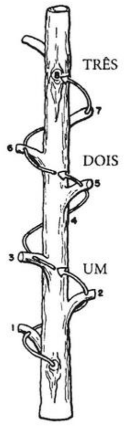
5.3.6 Plantas

Com as plantas não seria diferente o encontro da razão áurea com a sequência de Fibonacci.

O termo filotaxia na Botânica, originário de grego phyllotaxis (“arranjo de folhas”), menciona-se ao modo das folhas se distribuírem nos galhos das plantas ou dos talos se distribuírem ao longo de um ramo (RAMOS, 2013). A sequência de Fibonacci aparece na disposição dos galhos nas árvores em seus troncos e também nas folhas que estão nesses galhos (ALENCAR, 2004).

O crescimento tanto do arranjo dos galhos tanto quanto o das folhas nos galhos tendem a acontecer em situações que otimizariam sua exposição ao sol, à chuva e ao ar (LIVIO, 2006). À medida que um talo vertical expande, ele produz folhas em pontos com espaçamento bem regular. Porém, as folhas não crescem em direção de uma sobre a outra, porque isso impediria que as folhas de baixo recebessem a umidade e a luz do sol de que elas precisam. Ao contrário, a passagem de uma folha para a próxima (ou de um talo para o próximo ao longo dos ramos) é caracterizada por espaçamentos do tipo parafuso em volta do ramo, conforme a Figura 18.

Figura 18 – Ramo de razão filotáxica 3/8



Fonte: Livio (2006, p. 130)

Extraordinariamente tais distribuições de seus ramos e talos tendem a coincidir com os números da sequência de Fibonacci.

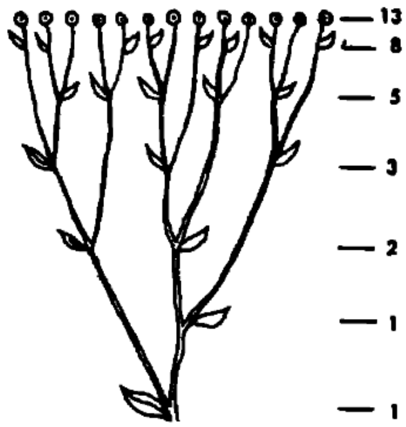
Na Figura 19, foi necessário de cinco voltas no sentido horário para encontrar um galho exatamente sobre o mais baixo, passando por oito galhos no processo.

Figura 19 – Sequência de Fibonacci nos galhos de uma planta

Fonte: Alencar (2004, p. 6)

Segundo Bez (1997) outra relação curiosa da botânica com os números da sequência de Fibonacci é referente quanto ao número de axilas do talo de uma planta na medida em que esta se desenvolve. Na Figura 20 verificamos um caso simples desta relação, em que os talos e as flores de uma espirradeira se apresentam esquematicamente dispostos. Nota-se o crescimento de galhos da axila e, por sua vez, outros novos galhos que deles crescem. Se traçarmos planos horizontais verificamos que a soma dos galhos velhos com os novos representa a sequência de Fibonacci.

Figura 20 – Espirradeira

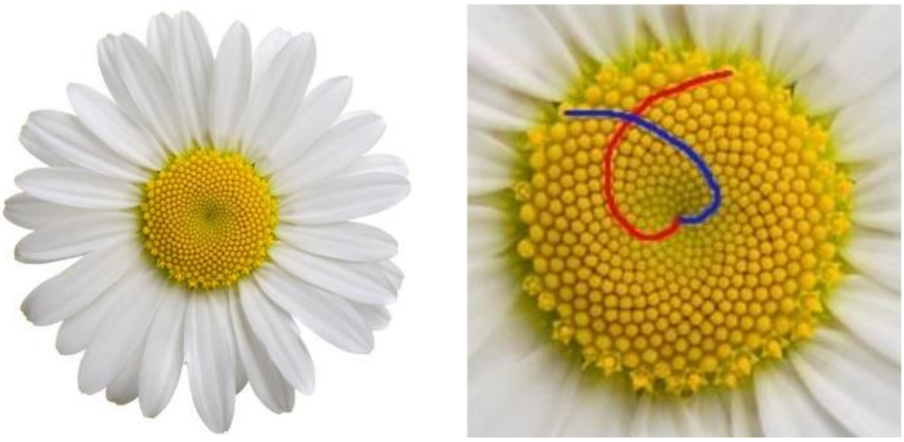


Bez (1997, p. 60)

5.3.7 Flores

Durante milhares de anos a espiral equiangular, uma bela curva que pode ser encontrada na natureza, tem sido estudada pelos matemáticos (CÂMARA; RODRIGUES, 2008). Podemos observar que as medidas dos segmentos que unem o centro da semente aos pontos laterais aumentam, mas as amplitudes dos ângulos formados por esses segmentos e as tangentes à semente mantêm-se, ou seja, as sementes seguem uma espiral equiangular ou logarítmica. Um dos exemplos são as margaridas. Na Figura 21, é evidenciada a organização espiralada das flores do receptáculo (flósculos amarelos). Macena (2018), através de um software, aplicando um zoom, destaca, em azul, uma espiral que gira em sentido anti-horário em vermelho, uma das espirais que giram, do centro para a borda, em sentido horário.

Figura 21 - Margarida



Fonte:https://www.gettyimages.pt/detail/foto/daisy-imagem-royalty-free/802742950?adppopup=true
(Acesso em 15 de maio de 2019)

Uma forma ainda mais perceptível é nos girassóis (Figura 22) e, também na equinácea púrpura (Figura 23), popularmente conhecida como purpúrea ou flor de cone.

Figura 22 – Girassol

Figura 22 - Fonte:http://baixaki.ig.com.br/ papel-de-parede/14305-Margarida.html
(Acesso em 15 de maio de 2019)

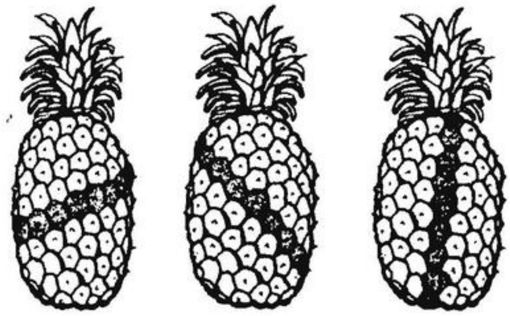
Figura 23 – Equinácea Purpúrea

Figura 23 - Fonte: http://www.mcs.surrey.ac.uk/ Personal/R.Knott/Fibonacci/fibnat.html
(Acesso em 15 de maio de 2019)

5.3.8 Abacaxi

Observamos uma beleza rara de filotaxia no abacaxi, onde a sequência referida é presente pelos gomos das cascas (Figura 24). Cada gomo tem a forma aproximada de um hexágono e faz parte de três diferentes espirais que se cruzam. Usualmente, cada espiral dessa se distribui em grupos de 8, 13, 21 ou 34 espirais paralelas em diferentes inclinações, formando uma sequência de Fibonacci (RAMOS, 2013).

Figura 24 - Abacaxi



Fonte: Livio (2006, p. 131)

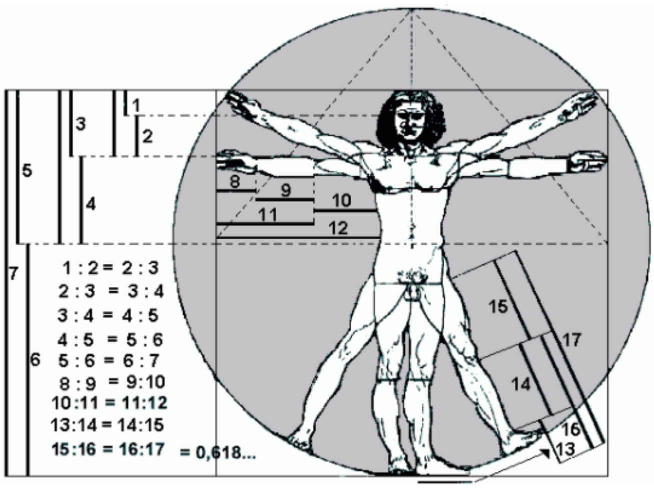
5.3.9 Corpo humano

Leonardo da Vinci estudou massivamente as ideias de proporção e simetria aplicadas ao encanto do corpo humano (VEIGA, 2016). Em O Homem Vitruviano, um de seus grandes desenhos, se você dividir a distância dos pés até o umbigo do homem pela distância do umbigo até o topo da cabeça, tem-se aproximadamente o valor 0,618 (o inverso do número de ouro). Segundo Vitruvius:

> [...] no corpo humano, o ponto central naturalmente é o umbigo. Porque se um homem for colocado deitado de costas, com as mãos e os pés estendidos e um compasso for centrado no seu umbigo, os dedos de suas mãos e de seus pés irão tocar a circunferência do círculo descrito a partir desse ponto. E assim como o corpo humano produz um contorno circular, uma figura quadrada também pode ser encontrada a partir dele. Pois se medirmos a distância das solas dos pés até o topo da cabeça e depois aplicarmos essa medida aos braços esticados, veremos que a largura será a mesma que a altura, como no caso de superfícies planas que são perfeitamente quadradas (27 a.C. apud LIVIO, 2006, p. 157).

Tais proporções podem ser vistas na Figura 25.

Figura 25 – O Homem Vitruviano e suas proporções



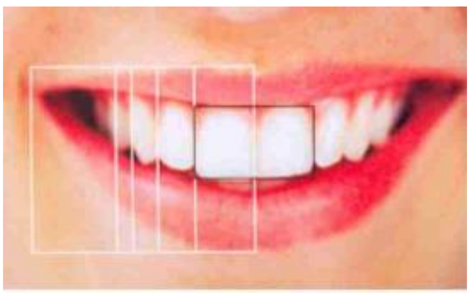
Fonte: Queiroz (2007, p. 34)

A maioria das pessoas que são consideradas lindas, nos apresenta proporções equilibradas em cerca das partes de seus corpos. É comprovado que nestas proporções há razões que se aproximam muito do número ϕ (QUEIROZ, 2007).

Na odontologia podemos ver a razão áurea também. Há demonstração através de diversos estudos onde o número de ouro se encontra na dentição e harmonia do sorriso (CÂMARA; RODRIGUES, 2008).

A posição dos quatro dentes da frente, tanto do lado esquerdo quanto do lado direito, está na razão áurea entre eles. Podemos observar essa razão na Figura 26. Por este motivo, quando fazemos reconstruções estéticas deles, é utilizada a razão áurea para conseguir um resultado proporcional e harmonioso, respeitando as particularidades de cada indivíduo (RAMOS, 2007).

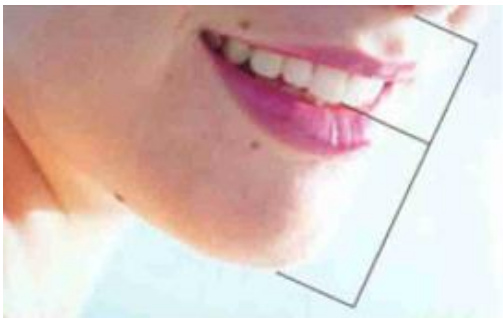
Figura 26 - Proporção áurea dos dentes



Fonte: Câmara e Rodrigues (2008, p. 65)

Na figura 27, no lado baixo da face, notamos que a razão áurea é responsável por dividi-lo em um terço, que vai da ponta do nariz até a linha dos lábios e da linha dos lábios até a ponta do queixo (CÂMARA; RODRIGUES, 2008).

Figuras 27 - Divisão áurea do queixo ao nariz



Fonte: Câmara e Rodrigues (2008, p. 65)

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho foi realizado por meio de pesquisas bibliográficas em livros, artigos, dissertações, entre outros, sobre a aplicação da razão áurea em nossa vida.

A razão áurea, denotada pela letra ϕ, é um dos números mais intrigantes da matemática, pois envolve teoremas matemáticos e misticismo, e apresenta a mais agradável proporção entre duas medidas.

A partir desse estudo foi possível ver o quanto fascinante ela é. A razão áurea é repleta de carga histórica significativa que vem desde a época dos egípcios, inacreditavelmente 2.500 anos a.C. e está relacionada simplesmente com tudo.

Foram apresentadas as principais aplicações em que a razão áurea se encontra. Foi possível perceber também o quanto ela está relacionada com a sequência de Fibonacci e como elas andam de mãos juntas.

De fato, é um ótimo tema para ser abordado a fundo em escolas para que os alunos consigam ver essa mágica que a Matemática possui. Se for apresentada de forma dinâmica e prática, poderão ser abordadas todas as relações da razão áurea com o universo. Além da possibilidade de despertar o interesse numa matéria que não costuma ser a preferida dos alunos e com um alto grau de dificuldade.

Este trabalho foi finalizado com muita satisfação, enriquecimento intelectual e surpresa por saber até onde a matemática pode chegar. Inclusive no livro de Mario Livio, há um capítulo que se chama “será que Deus é um matemático?”. É possível que sim.

REFERÊNCIAS

ALENCAR, Maria Efigênia Gomes de. O número Φ e a sequência de Fibonacci. Física na Escola, v.5, n. 2. Sobral, 2004.

ÁVILA, Geraldo.Retângulo Áureo, Divisão Áurea e Sequência de Fibonacci. Revista do Professor de Matemática, São Paulo, n. 06, pág. 09-14, 1985. Disponível em:<http://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/midias_digitais_II/modulo_IV/retangulo_aureo.pdf>. Acesso em 11 de maio de 2019.

BABBIE, Earl Robert. The practice of social research. Belmont: Wadsworth, 1986.

BELINI, Marcelo Manechine Belini. A razão áurea e a sequência de Fibonacci. Dissertação (Matemática) – Ciências Matemáticas e de Computação ICMC-USP. São Carlos, 2015.

BEZ, Edson Tadeu. Relacionando padrões entre sequência de Fibonacci, secção áurea e ternos pitagóricos. Monografia (Matemática) – Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis, 1997. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/96816/Edson_Tadeu_Bez.PDF?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em: 14 de maio de 2019.

CÂMARA, Marcos Antônio da; RODRIGUES, Melissa da Silva. O número Φ. Monografia (Faculdade de Matemática) – Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2008. Disponível em: <http://www.portal.famat.ufu.br/sites/famat.ufu.br/files/Anexos/Bookpage/Famat_revista_11_artigo_05.pdf>. Acesso em 12 de maio de 2019.

CARAÇA, Bento de Jesus. Lições de Álgebra e Análise. Lisboa: Livraria Sá da Costa, 1959.

CELUQUE, Leonardo. A série de Fibonacci: um estudo das relações entre as ciências da complexidade e as artes. Dissertação (Ensino, Filosofia e História das Ciências) – Universidade Federal da Bahia e Universidade Estadual de Feira de Santana. Salvador, 2004.

CONCHA DO *nautilus pompilius. Foto de uma c*oncha do *Nautilus pompilius.* Disponível em: <https://br.pinterest.com/pin/467389267572746827>. Acesso em 14 de maio de 2019.

CONTADOR, Paulo Roberto Martins. A matemática na arte e na vida. 2. ed. rev. São Paulo: Livraria da Física, 2011.

DOCZI, Gyorgy. O poder dos limites: harmonias e proporções na natureza, arte e arquitetura. 1. ed. São Paulo: Mercuryo, 1990.

EQUINÁCEA PURPÚREA. Foto de uma flor de equinácea purpúrea. Disponível em: <http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fibnat.html>. Acesso em: 15 de maio de 2019.

FIBONACCI. Foto de Fibonacci. Disponível em: <https://atitudereflexiva.wordpress.com/2016/12/07/a-sequencia-de-fibonacci/>. Acesso em: 09 de maio 2019.

GERHARDT, Tatiana Engel; SILVEIRA, Denise Tolfo. Métodos de pesquisa. 1 ed. Rio Grande do Sul: UFRGS, 2009.

GIL, Antonio Carlos. Métodos e técnicas de pesquisa social. São Paulo: Atlas, 2007.

GIRASSOL. Foto de uma flor girassol. Disponível em: <http://baixaki.ig.com.br/papel-de-parede/14305-Margarida.htm>. Acesso em: 15 de maio de 2019.

HUETE, Sánchez; BRAVO, Fernández. O Ensino de Matemática: fundamentos teóricos e bases psicopedagógicas. Tradução Ernani Rosa. Porto Alegre: Artmed, 2006.

JUNIOR, Antônio Martins da Rocha. Divina Proporção: Aspectos filosóficos, geométricos e sagrados da seção áurea. Fortaleza: Expressão Gráfica, 2011.

LANDIM, Nilo Pinheiro. Razão Áurea: Expressando a beleza desse número para o ensino médio. Dissertação (Matemática) – Universidade Federal Rural do Semiárido. Mossoró, 2014. Disponível em: <https://ppgmat.ufersa.edu.br/wp-content/uploads/sites/58/2016/02/Disserta%C3%A7%C3%A3o-Nilo-Pinheiro.pdf>. Acesso em: 13 de maio de 2019.

LAURO, Maira Mendias. A razão áurea e os padrões harmônicos na natureza, artes e arquitetura. *Exacta*, São Paulo, v. 3, p. 35-48, 2005.

LEOPOLDINO, Karlo Sérgio Medeiros. Sequências de Fibonacci e a Razão Áurea. Trabalho de conclusão de curso (Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Natal, 2016.

LIMA, Telma Cristiane Sasso de; MIOTO, Regina Célia Tamaso. Procedimentos metodológicos na construção do conhecimento científico: a pesquisa bibliográfica. Revista Katalysis, v 10, p. 35-45, 2007.

LIVIO, Mario. Razão Áurea: A histório de Fi, um número surpreendente. Rio de Janeiro: Record, 2006.

MACENA, Edcarlos da Silva Macena. Identidades dos números de Fibonacci: uma proposta de sequência didática para turmas olímpicas de nível 2. Dissertação (Matermática) – Universidade Federal de Alagoas. Maceió, 2018. Disponível em: < http://www.repositorio.ufal.br/bitstream/riufal/3324/1/Identidades%20dos%20n%c3%bameros%20de%20Fibonacci%3a%20uma%20proposta%20de%20sequ%c3%aancia%20did%c3%a1tica%20para%20turmas%20ol%c3%admpicas%20de%20n%c3%advel%202.pdf>. Acesso em 15 de maio de 2019.

MARGARIDA. Foto de uma flora de margarida. Disponível em: <https://www.gettyimages.pt/detail/foto/daisy-imagem-royalty-free/802742950?adppopup=true>. Acesso em: 15 de maio de 2019.

PARTHENON E SUAS PROPORÇÕES. Foto do templo de Parthenon e suas proporções. Disponível em: <https://www.matematicaefacil.com.br/2015/06/razao-aurea-numero-ouro.html>. Acesso em 16 de maio de 2019.

PIRÂMIDE DE QUEÓPS E O NÚMERO DE OURO. Foto da pirâmide e demonstração de onde se encontra o número de ouro. Disponível em: < https://www.bpiropo.com.br/fpc20070226.htm>. Acesso em 16 de maio de 2019.

QUEIROZ, Rosania Maria. Razão Áurea: A beleza de uma razão surpreendente. Matemática – Universidade Estadual de Londrina. Londrina, 2007.

RAMOS, Marcos Gertrudes Oliveira Ramos. A sequência de Fibonacci e o número de ouro. Dissertação (Matemática) – Universidade de Santa Cruz. Ilhéus, 2013.

Disponível em: <http://www.biblioteca.uesc.br/biblioteca/bdtd/201160277d.pdf>. Acesso em 14 de maio de 2019.

SILVEIRA, Marisa Rosâni Abreu da. A Dificuldade de Matemática no Dizer do Aluno: ressonâncias de sentido de um discurso. Educ. Real., Porto Alegre, v. 36, n. 3, p. 761-779, set/dez. 2011.

SOUSA, A. do C. Quando o lúdico faz parte do ensino de matemática. IX Baú de Matemática. Ermesinde/Valongo, Lisboa, 2004.

VEIGA, Leila Eleanor Monteiro. A volta do número de ouro. Trabalho científico (Matemática) - Instituto Superior de Educação. Praia, 2006. Disponível em: <www.portaldoconhecimento.gov.cv/bitstream/10961/2242/1/monog.actual.pdf>. Acesso em 15 de maio de 2019.